Journal of Science The University of Danang - University of Science and Education - ISSN: 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM – ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA TẬP 7 ĐIỂM BÉO TRONG KHÔNG GIAN XẠ ẢNH P⁴

Trần Nam Sinh[a*], Nguyễn Đức Hồng[b]

Nhận bài:
29 – 01 – 2020
Chấp nhận đăng:
25 – 03 – 2020
http://jse.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Chỉ số chính quy của tập điểm béo là một vấn đề được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Việc tính đúng giá trị của nó là khó. Vì vậy, người ta tìm chặn trên tốt của nó. Cho đến nay, việc tìm chặn trên tốt đã được Nagel và Trok giải quyết. Tuy nhiên, bài toán tính giá trị của chỉ số chính quy vẫn còn mở. Trong bài báo này, chúng tôi tính chỉ số chính quy của một tập 7 điểm béo trong không gian xạ ảnh P^4, và được trình bày qua Định lí 3.4.

Từ khóa: chỉ số chính quy; tập điểm béo; không gian xạ ảnh; lược đồ; hàm Hilbert.

1. Giới thiệu

Cho $P^n := P_k^n$ là một không gian xạ ảnh trên trường đóng đại số k và $R = k[x_0, x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức $n+1$ biến $x_0, x_1, ..., x_n$ với hệ số trên k. Cho $P_1, ..., P_n$ là các điểm phân biệt trong P^n, kí hiệu $\wp_i$ là iđêan nguyên tố thuần nhất xác định bởi P_i, $i = 1, ..., s$. Cho $m_1, ..., m_s$ là các số nguyên dương, iđêan $I = \wp_1^{m_1} \cap \cdots \cap \wp_s^{m_s}$ gồm các đa thức $f \in R$ triệt tiêu tại P_i với số bội $\geq m_i, i = 1, ..., s;$ ta kí hiệu Z là lược đồ chiều không xác định bởi I và gọi

$$Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$$

là tập điểm béo trong P^n.

Vành tọa độ thuần nhất của Z là $A := R/I$. Đây là vành phân bậc $A = \oplus_{t\geq 0} A_t$ có số bội $e(\mathrm{A}) := \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i + n - 1}{n}$. Với mọi $t \in N$, phần phân bậc A_t là một k-không gian véc tơ hữu hạn chiều. Hàm số

$$H_Z(\mathrm{t}) = \dim_k A_t$$

được gọi là hàm Hilbert của Z.

Hàm Hilbert tăng chặt cho đến khi đạt được số bội $e(A)$, tại đó nó dừng. Chỉ số chính quy của Z là số nguyên dương bé nhất sao cho $H_Z(\mathrm{t}) = \mathrm{e(A)}$ và nó được kí hiệu là reg(Z). Chỉ số chính quy reg(Z) bằng với chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford reg(A) của vành tọa độ A.

Việc tính đúng giá trị của reg(Z) là khó, thay vì vậy người ta tìm chặn trên của nó. Đã có nhiều kết quả về chặn trên của reg(Z) có thể tìm thấy trong [1], [2], [3], [4], [6], [7].

Cho tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$ trong P^n, đặt

$$T_j = \max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1}, ..., P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{- phẳng}\},$$

$$T = \max\{T_j \mid j = 1, ..., n\}.$$

[a]Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng
[b]Trường Đại học Nông Lâm – Đại học Huế
* **Tác giả liên hệ**
Trần Nam Sinh
Email: tnsinh@ued.udn.vn

Một tập điểm $X = \{P_1,...,P_s\}$ được gọi là không suy biến nếu *X* không nằm trên một siêu phẳng. Một tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$ được gọi là không suy biến nếu *X* không suy biến. Năm 2016, E. Ballico, O. Dumitrescu và Postinghel (xem [1, Theorem 2.1]) đã chứng minh được reg(*Z*) $\le T$.

Cho tập $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$ không suy biến trong P^n. Gần đây Nagel và Trok (xem [5, Theorem 5.3]) đã chứng minh được chặn trên đúng cho tập điểm béo tùy ý trong P^n.

Nhắc lại rằng việc tính đúng giá trị của reg(*Z*) là rất khó. Vì vậy chỉ có vài kết quả được đăng trên các tạp chí uy tín như sau:

Năm 1984, Davis và Geramita (xem [3, Corollary 2.3]) đã tính được giá trị của reg(*Z*) khi tập điểm nằm trên một đường thẳng với

$$\text{reg}(Z) = m_1 + \cdots + m_s - 1.$$

Một đường cong hữu tỉ chuẩn trong P^n là đường cong có phương trình tham số

$$x_0 = t^n, x_1 = t^{n-1}u, ..., x_{n-1} = tu^{n-1}, x_n = u^n.$$

Cho một tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$ trong P^n, với $m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_s$. Năm 1993, các tác giả Catalisano, Trung và Valla đã chỉ ra công thức tính reg(*Z*) trong hai trường hợp sau (xem [2]):

Nếu $s \ge 2$ và $P_1,...,P_s$ nằm trên đường cong hữu tỉ chuẩn trong P^n (xem [2, Proposition 7]), thì

$$\text{reg}(Z) = \max\left\{m_1 + m_2 - 1, \left[(\sum_{i=1}^{s} m_i + n - 2)/\text{n}\right]\right\}.$$

Nếu $n \ge 3, 2 \le s \le n+2, 2 \le m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_s$ và $P_1,...,P_s$ nằm ở vị trí tổng quát trong P^n (xem [2, Corollary 8]), thì

$$\text{reg}(Z) = m_1 + m_2 - 1.$$

Năm 2012, Thiện (xem [8, Theorem 3.4]) cũng đã tính được chỉ số chính quy reg(*Z*)=*T* cho tập *s+2* điểm béo sao cho chúng không nằm trên một *(s-1)*-phẳng trong P^n với $s \le n$. Trong năm 2017, P.V. Thiện và T.N. Sinh (xem [9, Theorem 4.6]) đã tính được chỉ số chính quy reg(*Z*)=*T* cho tập *s+3* điểm béo đồng bội, không nằm trên *(r-1)*-phẳng, $s \le r+3$ trong P^n.

Giả thiết reg*(Z)* = *T* cho tập điểm béo tùy ý trong P^n không còn đúng bởi vì U. Nagel và B. Trok (xem [5, Example 5.7]) đã chỉ ra rằng: nếu $Z = mP_1 + \cdots + mP_s$ là tập điểm béo trong P^n, gồm năm điểm ở vị trí tùy ý và $\binom{d+n}{d}$ ở vị trí tổng quát, $d \ge 5$ thì *reg(Z) < T*, với *d* (hoặc *n*) đủ lớn.

Bài toán ước lượng giá trị của reg(*Z*) cũng có ý nghĩa. Năm 2019, P. V. Thiện và T.T.V. Trinh (xem [10]) đã ước lượng được giá trị của reg(*Z*) với

$$T\text{-}1 \le \text{reg}(Z) \le T$$

cho các trường hợp sau:

- Các điểm $P_1,...,P_s$ nằm trên hai đường thẳng.
- Tập điểm gồm nhiều nhất năm điểm béo.
- $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$ điểm béo không suy biến trong P^n.

Trong bài báo này, chúng tôi tính chỉ số chính quy reg(*Z*) cho trường hợp 7 điểm béo trong P^4 sao cho không có *s+3* điểm nào của chúng nằm trên *s*-phẳng, *s<4*. Kết quả này là hoàn toàn mới và được nêu trong Định lí 3.4.

2. Các bổ đề cần dùng

Trong quá trình chứng minh các kết quả chính, chúng tôi sử dụng các bổ đề sau. Bổ đề sau đây dùng để tính giá trị reg(*Z*) khi tập điểm nằm trên một đường thẳng.

Bổ đề 2.1. *([3, Hệ quả 2.3]). Nếu* $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$ *là một tập điểm béo tùy ý trong* P^n*, thì* reg(*Z*) $= m_1 + \cdots + m_s - 1$ *khi và chỉ khi các điểm* $P_1,...,P_s$ *nằm trên một đường thẳng.*

Cho tập các chỉ số *{1,…,s}* và $\{i_1,...,i_r\} \subseteq \{1,...,s\}$ là tập chỉ số con của *{1,…,s}*. Ta gọi $Y = m_{i_1}P_{i_1} + \cdots + m_{i_r}P_{i_r}$ là *tập điểm béo con* của tập $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$. Bổ đề sau giúp ta so sánh chỉ số chính quy của một tập điểm béo con của tập điểm béo cho trước.

Bổ đề 2.2. *(8, Bổ đề 3.3]). Cho* $X=\{P_1,...,P_s\}$ *là các điểm phân biệt trong* P^n *và* $m_1,...,m_s$ *là các số nguyên dương. Đặt* $I=\wp_1^{m_1}\cap\cdots\cap\wp_s^{m_s}$. *Nếu* $Y=\{P_{i_1},...,P_{i_r}\}$ *là một tập con của X và* $J=\wp_{i_1}^{m_{i_1}}\cap\cdots\cap\wp_{i_r}^{m_{i_r}}$ *thì*

$$\operatorname{reg}(R/J)\le\operatorname{reg}(R/I).$$

Từ đây suy ra, nếu $Z=m_1P_1+\cdots+m_sP_s$ *là tập điểm béo xác định bởi iđêan I và* $U=m_{i_1}P_{i_1}+\cdots+m_{i_r}P_{i_r}$ *là tập điểm béo xác định bởi iđêan J, thì ta có*

$$\operatorname{reg}(U)\le\operatorname{reg}(Z).$$

Hai bổ đề tiếp theo cho phép ta tính chỉ số chính quy cho một tập điểm cho trước.

Bổ đề 2.3. *([10, Định lí 3.1]). Cho* $X=\{P_1,...,P_{s+3}\}$ *là một tập các điểm phân biệt ở vị trí tổng quát trên s-phẳng, không nằm trên (s-1)-phẳng trong* P^n, $s\le n$, *và* m_i *là các số nguyên dương. Đặt* $Z=m_1P_1+\cdots+m_{s+3}P_{s+3}$ *là tập điểm béo. Khi đó,*

$$\operatorname{reg}(Z)=\max\{T_j\mid j=1,...,n\}$$

trong đó

$$T_j=\max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q}m_{i_l}+j-2}{j}]\mid P_{i_1},...,P_{i_q}\text{ nằm trên một j-phẳng}\},$$

j=1,…,n.

Bổ đề sau đây cho ta chặn trên cho tập *n+3* điểm béo không suy biến trong P^n.

Bổ đề 2.4. *([1, Định lí 2.1]). Cho* $Z=m_1P_1+\cdots+m_{n+3}P_{n+3}$ *là một tập n+3 điểm béo không suy biến trong* P^n. *Khi đó,*

$$\operatorname{reg}(Z)\le\max\{T_j\mid j=1,...,n\}$$

trong đó

$$T_j=\max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q}m_{i_l}+j-2}{j}]\mid P_{i_1},...,P_{i_q}\text{ nằm trên một j-phẳng}\},$$

j=1,…,n.

3. Chỉ số chính quy của tập 7 điểm béo

Để chứng minh các kết quả của bài báo này, chúng tôi bắt đầu từ nhận xét sau:

Nhận xét. Cho $X=\{P_1,...,P_7\}$ là một tập 7 điểm phân biệt không suy biến, $3\le m_1\ge\cdots\ge m_7$ là các số nguyên dương. Cho $Z=m_1P_1+\cdots+m_7P_7$ là một tập bảy điểm béo. Đặt

$$T_j=\max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q}m_{i_l}+j-2}{j}]\mid P_{i_1},...,P_{i_q}\text{ nằm trên một j-phẳng}\}.$$

Khi đó

$$T_1\ge T_4.$$

Thật vậy, ta có

$$m_1+m_2-\frac{m_1+m_2+\cdots+m_7+2}{4}=$$

$$\frac{(m_2-m_3)+(m_2-m_4)+(m_2-m_5)+(m_1-m_6)+(m_1-m_7)+(m_1-2)}{4}>0$$

Từ đó suy ra

$$m_1+m_2>\left[\frac{m_1+m_2+\cdots+m_7+2}{2}\right]$$

và do đó chúng ta có

$$m_1+m_2-1\ge\left[\frac{m_1+m_2+\cdots+m_7+2}{2}\right].$$

Vì vậy, chúng ta kết luận

$$T_1\ge T_4.$$

Mệnh đề 3.1. *Cho* $X=\{P_1,...,P_7\}$ *là tập 7 điểm phân biệt không suy biến, không ở vị trí tổng quát trong* P^4, *sao cho không có s+3 điểm nào của X nằm trên s-phẳng, s<4, và không có s+2 điểm nào của X nằm trên s-phẳng, s=1,2. Cho* $3\le m_1\ge\cdots\ge m_7$ *là các số nguyên dương và* $Z=m_1P_1+\cdots+m_7P_7$ *là một tập điểm béo. Khi đó,*

$$\operatorname{reg}(Z)=\max\{T_j\mid j=1,...,4\},$$

trong đó

$$T_j=\max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q}m_{i_l}+j-2}{j}]\mid P_{i_1},...,P_{i_q}\text{ nằm trên một j-phẳng}\}.$$

Chứng minh: Vì X không nằm ở vị trí tổng quát, không có $s+3$ điểm của X nằm trên s-phẳng, $s < 4$, và không có $s+2$ của X nằm trên s-phẳng nên tồn tại 5 điểm của X nằm trên 3-phẳng. Dựa vào ràng buộc này, chúng ta đánh giá các giá trị của T_j, $j = 1,...,4$.

Vì không có 4 điểm nào của X nằm trên 2-phẳng nên $T_2 = \left[\dfrac{m_1+m_2+m_3}{2}\right]$.

Mặt khác, ta có:

$$(m_1+m_2-1) - \frac{m_1+m_2+m_3}{2} = \frac{m_1+m_2-m_3-2}{2} \geq 0,$$

điều này suy ra

$$m_1+m_2-1 \geq \left[\frac{m_1+m_2+m_3}{2}\right].$$

Vì vậy chúng ta có:

$$T_1 \geq T_2. \qquad (1)$$

Từ giả thiết của mệnh đề, ta có:

$$T_3 \leq \left[\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+1}{3}\right].$$

Hơn nữa

$$m_1+m_2 - \frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+1}{3} = \frac{(m_1-m_3)+(m_2-m_4)+(m_2-m_5)+(m_1-1)}{3} > 0,$$

nên chúng ta có:

$$m_1+m_2 > \frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+1}{3},$$

và từ đó suy ra:

$$m_1+m_2 > \left[\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+1}{3}\right],$$

hay

$$m_1+m_2-1 \geq \left[\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+1}{3}\right].$$

Vì vậy chúng ta có:

$$T_1 \geq T_3. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và nhận xét trên, ta có

$$T = T_1 = \max\{T_j \mid j = 1,...,4\}.$$

Bây giờ ta chứng minh reg(Z) $\geq T_1$. Xét các tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_7P_7$ và $Y = m_1P_1 + m_2P_2$ trong P^4. Theo Bổ đề 2.1 và 2.2 ta có:

$$\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(Y) = T_1. \qquad (3)$$

Từ Bổ đề 2.4 chúng ta suy ra

$$\text{reg}(Z) \leq T_1. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có

$$\text{reg}(Z) = T = \max\{T_j \mid j = 1,...,4\}.$$

Vậy Mệnh đề 3.1 đã được chứng minh.

Mệnh đề 3.2. *Cho $X = \{P_1,...,P_7\}$ là tập 7 điểm phân biệt không suy biến, không ở vị trí tổng quát trong P^4, sao cho không có s+3 điểm nào của X nằm trên s-phẳng, $2 \leq s < 4$, và không có 3 điểm nào của X nằm trên một đường thẳng. Cho $3 \leq m_1 \geq \cdots \geq m_7$ là các số nguyên dương và $Z = m_1P_1 + \cdots + m_7P_7$ là một tập điểm béo. Khi đó*

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j = 1,...,4\},$$

trong đó

$$T_j = \max\left\{\left[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}\right] \;\middle|\; P_{i_1},...,P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng}\right\}.$$

Chứng minh.

Trường hợp 1: Không có 4 điểm nào của X nằm trên 2-phẳng. Khi đó, không có $s+2$ điểm của X nằm trên s-phẳng, $s=1,2$. Theo Mệnh đề 3.1 ta có

$$\text{reg}(Z) = T = \max\{T_j \mid j = 1,...,4\}.$$

Trường hợp 2: Có 4 điểm của X nằm trên 2-phẳng. Từ chứng minh Định lí 3.1 ta có:

$$T_1 \geq T_3.$$

Từ nhận xét ở trên, suy ra

$$T = \max\{T_1, T_2\}.$$

- Nếu $T = T_1$: Khi đó, $T_1 = m_1 + m_2 - 1$, xét tập điểm béo $Y = m_1P_1 + m_2P_2$. Theo Bổ đề 2.1 ta có

$$\text{reg}(Y) = T_1.$$

Theo Bổ đề 2.2 ta có:

$$\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(Y) = T_1. \quad (5)$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.5 ta có

$$\text{reg(Z)} \leq \text{T}_1. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$\text{reg(Z)} = T_1 = T.$$

- Nếu $T = T_2$: Gọi α là 2-phẳng đi qua 4 điểm $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}$ sao cho:

$$T = T_2 = \left\lceil \frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{4} \right\rceil.$$

Đặt $U = \{P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}\}$, và xét tập điểm béo $Z_\alpha = m_{i_1}P_{i_1} + \cdots + m_{i_4}P_{i_4}$ trên 2-phẳng α. Vì không có 3 điểm nào của U nằm trên một đường thẳng nên theo Bổ đề 2.3 ta có

$$\text{reg}(Z_\alpha) = \max\{T_1, T_2\} = T_2.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.2 chúng ta suy ra reg(Z) $\geq$ reg(Z_α) = T_2. (7)

Mặt khác, theo Bổ đề 2.4 chúng ta kết luận reg(Z) $\leq T = T_2$. (8)

Từ (7) và (8) ta có

$$\text{reg(Z)} = T_2 = T.$$

Mệnh đề 3.2 đã được chứng minh.

Mệnh đề 3.3. *Cho $X = \{P_1, ..., P_7\}$ là tập 7 điểm phân biệt không suy biến, không ở vị trí tổng quát trong P^4, sao cho không có s+3 điểm nào của X nằm trên s-phẳng, $s < 4$. Cho $3 \leq m_1 \geq \cdots \geq m_7$ là các số nguyên dương và $Z = m_1P_1 + \cdots + m_7P_7$ là một tập điểm béo. Khi đó*

$$\text{reg(Z)} = \max\{T_j \mid j = 1, ..., 4\},$$

trong đó:

$T_j = \max \{[\dfrac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1}, ..., P_{i_q}$ *nằm trên một j-phẳng*$\}$.

Chứng minh.

Trường hợp 1: Không có 3 điểm của X nằm trên một đường thẳng. Khi đó, theo Mệnh đề 3.2 ta có

$$\text{reg(Z)} = T.$$

Trường hợp 2: Có 3 điểm của X nằm trên một đường thẳng. Từ đây luôn có 5 điểm của X nằm trên 3-phẳng. Từ chứng minh của Mệnh đề 3.1 ta có

$$T_1 \geq T_3 \quad (9)$$

Do không $T_1 \geq T_3$ g có $s+3$ điểm của X nằm trên s-phẳng nên có duy nhất một đường thẳng đi qua 3 điểm của X. Giả sử l là đường thẳng đi qua 3 điểm P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i3}. Chúng ta có các trường hợp sau

Trường hợp 2.1: $m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} - 1 > m_1 + m_2 - 1$: Khi đó

$$m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2} = \frac{(\text{m}_1 - \text{m}_3) + (\text{m}_2 - \text{m}_4)}{2} \geq 0,$$

điều này suy ra

$$m_1 + m_2 \geq \left\lceil \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2} \right\rceil.$$

và do đó

$$m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} - 1 \geq m_1 + m_2 \geq \left\lceil \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2} \right\rceil \geq T_2,$$

hay

$$T_1 \geq T_2. \quad (10)$$

Từ (9), (10) và nhận xét trên ta có

$$T = T_1.$$

Xét tập điểm béo $Y = m_{i_1}P_{i_1} + m_{i_2}P_{i_2} + m_{i_3}P_{i_3}$. Vì P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i3} nằm trên một đường thẳng l nên theo Bổ đề 2.1

$$\text{reg}(Y) = m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} - 1 = T_1.$$

Mặt khác, từ Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.4 ta có

$$\text{reg(Z)} \geq \text{reg(Y)} = T_1 \quad (11)$$

và $\quad \text{reg}(Z) \leq T_1. \quad (12)$

Từ (11) và (12) chúng ta suy ra reg(Z) $= T_1 = T$.

Trường hợp 2.2. $m_1 + m_2 - 1 \geq m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} - 1$: Ta xét hai trường hợp sau.

- Mọi 2-phẳng đi qua 4 điểm luôn chứa l. Đặt

$$t = \max\left\{\left\lceil \frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_l}}{} \right\rceil \mid l = 4, ..., 7\right\}.$$

Không mất tính tổng quát, gọi β là 2-phẳng đi qua 4 điểm $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}$ sao cho

$$t = \left[\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2}\right].$$

Khi đó,

$$m_1 + m_2 - \frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2} = \frac{\left[(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2) - (m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3})\right] + (\mathrm{m}_1 - m_{i_4}) + \mathrm{m}_2}{} > 0.$$

Do đó $m_1 + m_2 > \frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2}$, suy ra $m_1 + m_2 > \left[\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2}\right]$,

hay

$$m_1 + m_2 - 1 \geq \left[\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2}\right].$$

Mặt khác, $m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{2} > 0.$

Suy ra $m_1 + m_2 > \left[\frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}\right]$. Từ đây ta có $m_1 + m_2 - 1 \geq \left[\frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}\right]$.

Hơn nữa,

$$T_2 = \max\left\{\left[\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2}\right], \left[\frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}\right]\right\}.$$

Vì vậy

$$T_1 \geq T_2. \tag{13}$$

Từ (9) và (13) và nhận xét trên ta có $T = T_1$, với $T_1 = m_1 + m_2 - 1$.

Xét tập điểm béo $Y = m_1P_1 + m_2P_2$. Theo Bổ đề 2.1 ta có

$$\operatorname{reg}(Y) = T_1.$$

Theo Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.4 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) \geq \operatorname{reg}(Y) = \mathrm{T}_1$$

và $\operatorname{reg}(Z) \leq T_1$.

Vậy chúng ta kết luận được reg(Z) = T.

- Tồn tại một 2-phẳng π đi qua 4 điểm của *X* không chứa *l*. Do π không chứa *l* nên π đi qua nhiều nhất một điểm của *l*. Vì thế 4 điểm nằm trên π không có 3 điểm nằm trên một đường thẳng.

Do $T_1 \geq T_3, T_1 \geq T_4$ nên $T = \max\{T_1, T_2\}$.

+ Nếu $T = T_1$: Khi đó, $T_1 = m_1 + m_2 - 1$, xét tập điểm béo $Y = m_1P_1 + m_2P_2$. Theo Bổ đề 2.1 và Bổ đề 2.2 ta có

$$\operatorname{reg}(Y) = \mathrm{T}_1$$

và

$$\operatorname{reg}(Z) \geq \operatorname{reg}(Y) = T_1. \tag{14}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.5 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) \leq \mathrm{T}_1. \tag{15}$$

Từ (14) và (15) suy ra

$$\operatorname{reg}(Z) = T_1 = T.$$

+ Nếu $T = T_2$: Gọi α là 2-phẳng đi qua 4 điểm $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}$ sao cho

$$T = T_2 = \left[\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{4}\right].$$

Đặt $U = \{P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}\}$, và xét tập điểm béo $Z_\alpha = m_{i_1}P_{i_1} + \cdots + m_{i_4}P_{i_4}$ trên 2-phẳng α. Do không có 3 điểm nào của *U* nằm trên một đường thẳng, theo Bổ đề 2.3 ta có

$$\operatorname{reg}(Z_\alpha) = \max\{T_1, T_2\} = T_2.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.4 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) \geq \operatorname{reg}(Z_\alpha) = T_2 \tag{16}$$

và

$$\operatorname{reg}(Z) \leq T = T_2. \tag{17}$$

Từ (16) và (17) ta có $\operatorname{reg}(Z) = T_2 = T$.

Vậy Mệnh đề 3.3 đã được chứng minh.

Định lí 3.4. *Cho* $X = \{P_1, ..., P_7\}$ *là tập 7 điểm phân biệt không suy biến trong* P^4, *sao cho không có s+3 điểm nào của X nằm trên s-phẳng,* $s < 4$. *Cho* $3 \leq m_1 \geq \cdots \geq m_7$ *là các số nguyên dương và* $Z = m_1P_1 + \cdots + m_7P_7$ *là một tập điểm béo. Khi đó,*

$$\operatorname{reg}(Z) = \max\left\{T_j \mid j = 1,...,4\right\},$$

trong đó

$$T_j = \max\left\{\left[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}\right] \mid P_{i_1},...,P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng}\right\}.$$

Chứng minh.

Trường hợp 1: Nếu X ở vị trí tổng quát trong P^4, theo Bổ đề 2.4 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) = T.$$

Trường hợp 2: Nếu X không nằm ở vị trí tổng quát.

- X không có $s+2$ điểm nằm trên một s-phẳng, $s=1,2$. Theo Mệnh đề 3.1 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) = T.$$

- X không có 3 điểm nằm trên một đường thẳng. Theo Mệnh đề 3.2 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) = T.$$

- X có 3 điểm nằm trên một đường thẳng. Theo Mệnh đề 3.3 ta có

$$\operatorname{reg}(Z) = T.$$

Định lí 3.4 đã được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] Ballico E., Dumitrescu O. and Postighel E. (2016). On Segre's bound for fat points in P^n. *J. Pure and Appl. Algebra*, 220, Issue, 2307-2323.

[2] Catalisano M.V., Trung N.V. and Valla G. (1993). A sharp bound for the regularity index of fat points in general position. *Proc. Amer. Math. Soc*. 118, 717-724.

[3] Davis E.D. and Geramita A.V. (1984). The Hilbert function of a special class of 1-dimensional Cohen - Macaulay graded algebras, The Curves Seminar at Queen's. *Queen's Paper in pure and Appl. Math*. 67, 1-29.

[4] Fatabbi G. and Lorenzini A. (2001). On the sharp bound for the regularity index for any set of fat points. *J. Pure Apple. Algebra*. 161, 91-111.

[5] Nagel U. and Trok B. (2018). Segre's regularity bound for fat points scheme. (accepted 30/3/2018 at *Annali della Scuole Normale Superiore*).

[6] Segre B. (1961). Alcune question su insiemi finiti di punti geometria algebrica. *Atti. Convergno. Inern. di Torino*, 15-33.

[7] Thien P.V. (2000). Segre bound for the regularity index of fat points in P^3. *J. Pure and Appl. Algebra*, 151, 197214.

[8] Thien P.V. (2012), Regularity index of s+2 fat points not on a linear (s-1)-space. *Comm. Algebra*, 40, 3704-3715.

[9] Thien P.V. and Sinh T.N. (2017). On the regularity index of fat points not on a linear (r-1)-space, $s \le r + 3$. *Comm. Algebra*, 45, 4123-4138.

[10] Thien P.V. and Trinh T.T.V. (2019). An estimate of the regularity index of fat points in some. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp*. 49, 399-410.

THE REGULARITY INDEX OF A SET OF SEVEN FAT POINTS IN PROJECTIVE SPACE P^4

Abstract: The regularity index of a set of fat point is the problem that has attracted many searchers' interest. It is not easy to calculate accurately the value of the fat point. So, one finds its sharp upper bound. Recently, Nagel and Trok have proved its sharp upper bound. However, the question about the value of regularity index still seems unsolvable. In this paper, we compute the regularity index of a set of seven fat points in the projective space P^4; it is presented via Theorem 3.4.

Key words: regularity index; fat point; projective space; scheme; Hilbert funtion.