

PHÁT HUY TÍNH TÍCH CỰC VÀ SÁNG TẠO CỦA HỌC SINH TRONG MÔI TRƯỜNG KHẢO SÁT TOÁN

NGUYỄN THỊ DUYẾN*

TÓM TẮT

Khảo sát toán là một tiếp cận dạy học lấy học sinh làm trung tâm. Tiếp cận này đã và đang được nghiên cứu và áp dụng trong các thực hành dạy học để đổi mới việc học toán của học sinh. Bài viết này trình bày tác động của tiếp cận khảo sát toán đến tính tích cực và sáng tạo của học sinh trong quá trình học toán của các em dựa trên một nghiên cứu định tính về tiếp cận này.

Từ khóa: khảo sát toán, quy trình khảo sát toán, môi trường khảo sát toán.

ABSTRACT

Promoting students' being active and creative in mathematical investigation environment

Mathematical investigation is a student-centered teaching approach. This approach has been being studied and applied to teaching practices to innovate students' mathematics learning. This paper presents the impact of mathematical investigation approach on students' being active and creative during their mathematical learning process from a qualitative research on this approach.

Keywords: Mathematical investigation, mathematical investigation process, mathematical investigation environment

1. Mở đầu

Phát huy tính tích cực và sáng tạo của học sinh trong quá trình học toán là một trong những yêu cầu cấp thiết của nền giáo dục nước ta trong giai đoạn hiện nay nhằm đáp ứng yêu cầu đổi mới việc dạy học toán trong nhà trường phổ thông và theo kịp xu hướng tiến bộ trong giáo dục toán trên thế giới. Mặc dù chương trình toán đã được đổi mới hướng đến việc phát triển tư duy toán học cho học sinh, tuy nhiên việc học toán của một bộ phận các em học sinh vẫn chưa đảm bảo được yếu tố tích cực và sáng tạo [2]. Nghiên cứu của tác giả này chỉ ra rằng hầu hết học sinh, kể cả các học sinh có

năng khiếu toán chỉ được giao những bài toán mang tính quy trình là chủ yếu. Các em ít có cơ hội khám phá những bài toán mang tính thách thức, yêu cầu khả năng giải quyết các vấn đề thực tiễn và các loại hình tư duy bậc cao. Vì thế hầu hết học sinh ít có hứng thú với các giờ học toán của mình. Trong lúc đó, nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng học sinh thật sự bị cuốn hút vào một giờ học toán nếu các em được học toán trong một môi trường chứa đựng nhiều yếu tố thách thức và kích thích trí tò mò, tưởng tượng của các em [4]. Nhiều tiếp cận dạy học đã được đề xuất để tìm kiếm các môi trường học tập tương tác nhằm thúc đẩy việc học toán của học sinh như: tiếp cận hỏi-tìm, giải quyết vấn đề, khảo sát toán... Trong

* ThS, Trường Đại học Sư phạm Huế

đó, khảo sát toán được xem là tiếp cận dạy học có thể mang lại nhiều cơ hội cho học sinh học toán một cách tích cực và sáng tạo. Tiếp cận dạy học này đã và đang thu hút sự quan tâm, nghiên cứu của các nhà giáo dục trên thế giới nhằm tìm kiếm cách thức để cải tiến việc học toán của học sinh và phát triển năng lực toán học cho các em. Tuy nhiên, ở nước ta tiếp cận này vẫn chưa được quan tâm nghiên cứu và áp dụng một cách rộng rãi vào thực tiễn dạy học ở trường phổ thông. Vì thế, cần tiến hành nhiều nghiên cứu hướng đến việc tìm hiểu tác động của tiếp cận khảo sát toán lên quá trình học toán của học sinh nhằm phát huy tính tích cực và sáng tạo của các em trong quá trình học toán.

Phương pháp nghiên cứu chính được sử dụng trong nghiên cứu này là phương pháp định tính. Hai hoạt động chính trong nghiên cứu này là quan sát học sinh khi các em học tập trong môi trường khảo sát toán và phỏng vấn các em trước và sau các tiết học đó. Thành phần tham gia vào nghiên cứu này gồm các học sinh của những lớp chọn ban tự nhiên 11 A₁, 11 A₃ và 12 A₁ ở một trường trung học phổ thông vùng ngoại ô thành phố Huế. Công cụ của nghiên cứu này là các tình huống khảo sát toán và bảng câu hỏi phỏng vấn học sinh. Để thu thập dữ liệu cho nghiên cứu này, các cuộc phỏng vấn ban đầu sẽ được thực hiện nhằm tìm hiểu về môi trường học toán hàng ngày của học sinh. Tiếp đến, các quan sát và ghi chú về các chủ điểm dự định thúc đẩy tính tích cực và sáng tạo của học sinh sẽ

được thực hiện khi các em làm việc trong môi trường khảo sát toán. Sau đó, các cuộc phỏng vấn học sinh sẽ được tiến hành nhằm tìm hiểu tác động của môi trường khảo sát toán lên việc học toán của các em. Dữ liệu thu được từ nghiên cứu này sẽ được phân tích một cách định tính. Giai đoạn đầu tiên trong quá trình phân tích dữ liệu liên quan đến việc viết ra các ghi nhớ từ việc xem lại các băng ghi hình và ghi âm cũng như đọc lại các ghi chú được thực hiện khi quan sát và phỏng vấn học sinh. Những ghi nhớ này là các mô tả tóm tắt về thông tin thu được từ các băng ghi âm và các ghi chú và được sử dụng như những thông tin ban đầu để tìm hiểu về cơ hội học tập đã nảy sinh giữa các học sinh tham gia vào nghiên cứu này khi các em làm việc trong môi trường khảo sát toán. Việc mã hóa dữ liệu sẽ dựa trên những ghi nhớ này và được thực hiện bằng cách dùng các từ khóa là *đặt câu hỏi, đưa ra các ý tưởng và các giả thuyết, thu thập và xử lý dữ liệu, đưa ra các kết luận và các tổng quát hóa, sử dụng suy luận quy nạp và suy luận ngoại suy*,... Những từ khóa này là những thuật ngữ liên quan đến các thành tố trong quy trình khảo sát toán mà học sinh sẽ tiến hành khi các em học tập trong môi trường dạy học lấy khảo sát làm trung tâm. Chúng cũng là những thành tố có mối liên hệ mật thiết với tính tích cực và sáng tạo của học sinh trong quá trình học toán. Một tiếp cận diễn giải sẽ được sử dụng trong khi phân tích dữ liệu để rút ra những kết luận từ những thông tin thu được.

2. Phát huy tính tích cực và sáng tạo của học sinh trong môi trường khảo sát toán

2.1. Quy trình khảo sát toán

Khảo sát toán là một tiếp cận dạy học đã được các nhà giáo dục trên thế giới quan tâm nghiên cứu và áp dụng vào thực tiễn dạy học từ những năm 1970. Tuy nhiên, hiện nay các nhà giáo dục vẫn chưa tìm được sự thống nhất trong quan niệm về thuật ngữ này. Một số nhà giáo dục ủng hộ quan điểm cho rằng khảo sát toán là tiếp cận mở [3, 7]. Họ cho rằng khảo sát toán là quá trình học sinh khám phá các bài toán mở bằng cách tiếp cận từ nhiều con đường khác nhau nhằm đưa đến nhiều ý tưởng toán và nhiều lời giải khác nhau. Nói cách khác, khảo sát toán là quá trình học sinh tiến hành khám phá các bài toán có mục đích, quy trình và lời giải mang tính chất mở. Trong khi đó,

một số nhà giáo dục khác lại đưa ra quan niệm khác về công việc khảo sát toán [5, 9]. Trong nghiên cứu về quá trình nhận thức của học sinh khi các em học tập trong môi trường khảo sát toán, hai tác giả Yeo và Yeap cho rằng khảo sát toán là quá trình học sinh khám phá các bài toán bằng những thao tác như đặc biệt hóa, phỏng đoán, kiểm chứng và tổng quát hóa. Vì khảo sát toán được xem xét trên góc độ là một quy trình nhận thức nên nó không bó hẹp vào các bài toán mở mà có thể tích hợp vào các bài toán đóng.

Từ hai quan điểm nêu trên, có thể xem khảo sát toán là quá trình học sinh tìm tòi, giải quyết các tình huống toán học phức tạp thông qua các hoạt động như nghi vấn, thử nghiệm, kiểm chứng, khái quát hóa và phản ánh. Một quy trình khảo sát toán gồm các bước theo sơ đồ sau:



Hình 1. Quy trình khảo sát toán

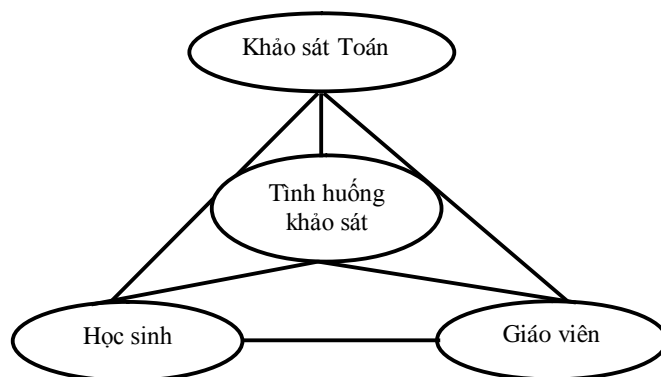
Bước đầu tiên trong quá trình khảo sát toán liên quan đến việc tìm hiểu tình huống ban đầu để đặt ra các câu hỏi, tìm kiếm các mục đích để khám phá, xây dựng các giả thuyết bằng các hoạt động thực nghiệm toán như đặc biệt hóa, đoán và thử, tìm kiếm quy luật... Bước tiếp

theo liên quan đến các hoạt động như thu thập dữ liệu, tìm phương án để giải quyết vấn đề, kiểm chứng hay bác bỏ các giả thuyết... Bước kế tiếp liên quan đến việc rút ra các kết luận và tổng quát hóa... Bước cuối cùng trong quy trình này liên quan đến các hoạt động như thảo luận,

đánh giá về các phương án giải quyết vấn đề, mở rộng các kết quả tìm kiếm được, đặt ra các câu hỏi để tiến hành những khám phá xa hơn. Quá trình khảo sát toán không dừng lại ở bước này mà vẫn tiếp tục với những chu trình tiếp theo. Các bước trong quy trình khảo sát toán không đưa ra các chỉ dẫn cụ thể cho việc khám phá các tình huống riêng lẻ mà chỉ cung cấp các gợi ý mang tính định hướng để kích thích người học theo đuổi các nghi vấn của mình trong quá trình khám phá kiến thức.

2.2. Môi trường dạy học lấy khảo sát toán làm trung tâm

Môi trường dạy học lấy khảo sát toán làm trung tâm là môi trường sư phạm có đặc trưng thể hiện ở việc học sinh tiến hành các hoạt động khảo sát toán khi các em giải quyết các nhiệm vụ học tập được yêu cầu. Có bốn yếu tố cấu thành nên môi trường dạy học lấy khảo sát toán làm trung tâm: tình huống khảo sát, khảo sát toán, học sinh, giáo viên theo sơ đồ sau:



Hình 2. Môi trường dạy học lấy khảo sát làm trung tâm

Khi học tập trong môi trường khảo sát toán, học sinh bị cuốn hút vào các tình huống khảo sát đòi hỏi các em phải đặt các câu hỏi, đưa ra các giả thuyết, thu thập dữ liệu và tiến hành nghiên cứu. Kiến thức toán sẽ được chiếm lĩnh bởi những học sinh tích cực tham gia vào quá trình khảo sát toán để tìm kiếm câu trả lời cho những câu hỏi của mình. Vấn đề cơ bản nhất trong quá trình khảo sát toán không phải là việc học sinh đưa ra được câu trả lời đúng mà việc các em đặt ra được các câu hỏi và tìm kiếm cho mình

một mục đích để khám phá tình huống ban đầu. Khi tiến hành quá trình khảo sát toán, các em sẽ đặt ra cho mình các câu hỏi có dạng như những vấn đề nào được đặt ra trong tình huống này, điều gì sẽ xảy ra nếu ta xem xét phần này hay phần kia của tình huống, những chiến lược giải quyết vấn đề nào sẽ được sử dụng, những phương án giải quyết vấn đề nào có thể chấp nhận, phương án nào là tối ưu... Các em cũng sử dụng hai kiểu suy luận đặc trưng khi khám phá toán đó là suy luận quy nạp và suy luận ngoại suy. Nếu

như suy luận quy nạp được xem là quá trình suy luận nhằm đưa đến kết quả tổng quát từ hữu hạn các kết quả tương tự từ một số trường hợp đặt biệt thì suy luận ngoại suy là quá trình suy luận nhằm tìm kiếm hoặc xây dựng một giả thuyết phù hợp nhất để giải thích cho những gì quan sát được [1]. Mặc dù không có gì đảm bảo giả thuyết trên là đúng nhưng các kiểu suy luận này có thể mang đến sự sáng tạo khi học toán.

Vai trò của người giáo viên là cung cấp cho học sinh các tình huống khảo sát toán mang tính vấn đề cao và chứa đựng nhiều cơ hội cho học sinh khám phá kiến thức toán. Giáo viên là người đưa ra các chỉ dẫn mang tính định hướng khi thật sự cần thiết để trợ giúp học sinh làm sáng tỏ các nghi vấn nhằm giúp các em theo đuổi những khám phá xa hơn trong quá trình khảo sát toán.

2.3. Đặc trưng của tình huống khảo sát toán

Các tình huống khảo sát hợp lí và lôi cuốn là yếu tố cơ bản nhằm đảm bảo thành công của một giờ học toán trong môi trường dạy học lấy khảo sát làm trung tâm [6]. Các tác giả này cũng chỉ ra rằng xây dựng một môi trường thúc đẩy việc học với nhiều cơ hội để học sinh tranh luận và phản ánh là cần thiết nhưng chưa đủ nếu tình huống khảo sát không đủ thách thức và thiếu tính kích thích quá trình khám phá toán của học sinh. Vậy một tình huống khảo sát toán phải đảm bảo những yếu tố gì để có thể thúc đẩy việc khám phá toán của học sinh nhằm phát huy tối đa tính tích cực nhận thức của các em? Một tình huống khảo sát

toán được xem là có tính thúc đẩy việc khám phá toán của học sinh nếu nó tích hợp được một số đặc trưng sau:

- Kích thích học sinh đặt ra các nghi vấn và các giả thuyết trong quá trình khám phá kiến thức. Từ đó, các em tích cực thu thập, xử lí các dữ liệu để tìm ra câu trả lời cho những nghi vấn của chính mình, khẳng định hay bác bỏ những giả thuyết đã được đưa ra, tìm kiếm các quy luật hoặc đi đến các tổng quát hóa, tiếp tục đề xuất những câu hỏi hay những giả thuyết mới để theo đuổi những khám phá xa hơn.

- Mang lại nhiều cơ hội để học sinh phát huy trí tưởng tượng và phát triển thói quen suy nghĩ một cách sáng tạo. Một khi học sinh có thể tiếp cận tình huống học tập dưới nhiều góc độ, đặt ra được nhiều nghi vấn và giả thuyết khác nhau để mở rộng tình huống khảo sát ban đầu thì các em có nhiều cơ hội để phát huy thói quen suy nghĩ một cách phân kì và năng lực sáng tạo của bản thân.

- Đòi hỏi học sinh phải tích hợp một cách sáng tạo các kiến thức và kĩ năng không chỉ của môn toán mà của các môn học khác. Học sinh có cơ hội sử dụng các kiến thức và kĩ năng liên môn theo cách thực tế nhất khi khám phá kiến thức toán học. Điều đó có nghĩa là cách thức mà học sinh suy nghĩ để giải quyết các nhiệm vụ học tập phải gần giống với cách mà các em suy nghĩ khi đối mặt với tình huống tương tự trong cuộc sống hàng ngày.

- Vừa đem lại hứng khởi cho học sinh nhưng vừa đủ thách thức để kích thích các học sinh theo đuổi những thắc mắc, nghi vấn của mình trong quá trình

khám phá kiến thức. Một mặt, học sinh phải có hứng thú và thấy việc khám phá tình huống học tập là đáng làm và có ý nghĩa. Từ đó các em mong muốn tiến hành việc khảo sát và mong muốn thực hiện thành công các quá trình khảo sát. Mặt khác, mỗi học sinh phải nỗ lực tối đa để tiếp cận tình huống tùy theo khả năng của bản thân mình. Điều này đòi hỏi tình huống học tập phải có nhiều điểm bắt đầu phù hợp với trình độ khác nhau của các học sinh trong lớp học.

- Thúc đẩy quá trình giao tiếp và thảo luận giữa các học sinh trong lớp học.

Tình huống phải mang lại cơ hội để học sinh giao tiếp và tranh luận với nhau về các ý tưởng toán học trong một môi trường tương tác, ở đó các em làm việc một cách cá nhân và hợp tác, cùng nhau chia sẻ các ý tưởng để tiến hành các khảo sát xa hơn.

Có thể thấy rõ sự khác biệt giữa một tình huống khảo sát toán và một nhiệm vụ học tập mang tính truyền thống khi so sánh chúng với nhau:

Nhiệm vụ học tập truyền thống	Tình huống khảo sát toán
<ul style="list-style-type: none"> - Câu hỏi được đặt ra bởi giáo viên - Tập trung vào các hoạt động ghi nhớ, nhận biết và áp dụng mang tính quy trình - Khuyến khích các hoạt động nhớ lại và thực hành - Tập trung chủ yếu vào kiến thức và kỹ năng trong môn toán - Thiếu tính thực tế và ít khi được đặt trong vào một ngữ cảnh cụ thể - Việc mở rộng bài toán được thực hiện sau khi giải bài toán ban đầu - Cho phép người học sử dụng ít chiến lược học tập khi giải quyết vấn đề - Học sinh chủ yếu làm việc một cách cá nhân khi giải quyết các bài toán 	<ul style="list-style-type: none"> - Tình huống ban đầu có thể do giáo viên hoặc học sinh đưa ra, những câu hỏi khám phá tình huống tiếp theo thường được đặt ra bởi học sinh - Khuyến khích các hoạt động khám phá kiến thức bằng việc thử nghiệm, tiên đoán, đặc biệt hóa, tổng quát hóa... với trọng tâm là giải quyết vấn đề - Khuyến khích việc suy nghĩ, tưởng tượng và phản ánh - Mang đến cho học sinh cơ hội sử dụng kiến thức và kỹ năng liên môn bằng cách tích hợp các tình huống thực tế vào môi trường khảo sát toán - Mang tính thực tế và được đặt trong một ngữ cảnh nào đó - Việc mở rộng bài toán được chứa đựng trong tình huống ban đầu - Đòi hỏi người học phải sử dụng nhiều chiến lược học tập khác nhau - Khuyến khích sự hợp tác của các học sinh vào việc khám phá tình huống

Một quy trình khá hữu ích trong việc giúp giáo viên làm quen với việc thiết kế các câu hỏi hiệu quả trong dạy học toán được đề xuất bởi Sullivan và Lilburn [8] sẽ được vận dụng để thiết kế các tình huống khảo sát toán. Quy trình này gồm ba bước như sau:

Bước 1: Nhận ra một chủ đề cần dạy.

Bước 2: Thiết kế một câu hỏi đóng và tìm câu trả lời cho câu hỏi đó.

Bước 3: Thiết kế tình huống khảo sát toán tương ứng mà quá trình khám phá tình huống này bao hàm việc tìm ra câu trả lời cho câu hỏi đóng nói trên.

Xét ví dụ về việc thiết kế một tình huống khảo sát toán:

Bước 1: Chủ đề bài học là số trung bình.

Bước 2: Câu hỏi đóng có thể là: *Điểm thi tốt nghiệp cuối cấp các môn Toán, Văn, Lí, Sinh, Sử và Anh văn của bạn An lần lượt là 7, 8, 6, 5, 7 và 9. Điểm trung bình các môn thi tốt nghiệp của bạn An là bao nhiêu?*

Bước 3: Tình huống khảo sát toán tương ứng là: *Điểm trung bình các môn thi tốt nghiệp cuối cấp Toán, Văn, Lí, Sinh, Sử và Anh văn của bạn An là 7. Điểm thi mỗi môn của bạn An là bao nhiêu?*

Rõ ràng việc khám phá tình huống này sẽ giúp học sinh tìm ra được nhiều lời giải khác nhau trong đó có cả câu trả lời cho câu hỏi đóng tương ứng. Trong khi việc trả lời câu hỏi đóng hướng học sinh đến việc áp dụng kiến thức mang tính quy trình thì tình huống khảo sát toán này sẽ mang lại nhiều cơ hội để các em thực hành về khái niệm số trung bình

nhằm hiểu sâu hơn về khái niệm này.

2.4. *Tính tích cực và sáng tạo của học sinh trong môi trường khảo sát toán*

Những tình huống khảo sát toán có tính thúc đẩy việc học sẽ mang đến hứng khởi cho học sinh và kích thích các em kiên trì tìm kiếm những khám phá xa hơn. Kết quả từ việc quan sát lớp học đã cho thấy năng lực suy luận, đặc biệt là suy luận quy nạp và suy luận ngoại suy được phát huy khi các em khám phá các tình huống khảo sát toán. Khi tiến hành các hoạt động khảo sát toán, học sinh sẽ dùng suy luận quy nạp để đề xuất các giả thuyết thông qua việc tiến hành các hoạt động dự đoán, thử nghiệm, tìm kiếm quy luật, tổng quát hóa... Các em sẽ dùng suy luận ngoại suy để đưa ra các giả thuyết phù hợp nhất từ những dữ liệu đã có để khám phá tình huống ban đầu. Có thể thấy rõ điều này qua việc phân tích đáp ứng của học sinh khi các em làm việc với tình huống số hình.





Tình huống 1 (số hình). Dự đoán số hạng tổng quát của các dãy số tam giác, hình vuông, ngũ giác.

Tình huống này được thiết kế để dạy tiết tự chọn trong chương Dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân, Đại số và Giải tích lớp 11 Nâng cao. Mục tiêu của tiết học này là nhằm giúp học sinh làm quen với chiến lược tìm kiếm quy luật, cụ thể là tìm kiếm quy luật để dự đoán kết quả của một số bài toán trước đây được phát biểu dưới dạng chứng minh các đẳng thức ở bài Phép quy nạp. Giáo viên sẽ dùng mô hình biểu diễn trực quan từ các phiếu học tập để giải thích cho học sinh thuật ngữ số hình. Dựng một đa giác





đều lồi k đỉnh ($k \geq 3$) và cạnh là 1 đơn vị. A là một đỉnh của đa giác đó, thực hiện các phép vị tự tâm A tỉ số $1, 2, \dots, n-1$ ($n \geq 2$) sẽ thu được những đa giác đều k cạnh vị tự với đa giác ban đầu. Trên các cạnh của đa giác đó, xuất phát từ đỉnh A đánh dấu các điểm cách đều nhau một khoảng bằng đơn vị. Số các điểm được đánh dấu trên tất cả các miền đa giác dựng được gọi là số k -giác thứ n của dãy

số k -giác. Tiếp đến học sinh trong lớp được phân thành các nhóm và được giao các phiếu học tập có chứa mô hình biểu diễn trực quan của các số k -giác để tự khám phá.





Dãy số tam giác: Học sinh đếm số chấm trên mỗi hình biểu diễn và tìm ra số hạng thứ n của dãy số này là tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là 1:

				...	
$t_1 = 1$	$t_2 = 1 + 2$	$t_3 = 1 + 2 + 3$	$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4$...	$t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n+1)/2$

Dãy số hình vuông: Học sinh đếm số chấm trên mỗi hình biểu diễn và tìm ra số hạng thứ n của dãy số này là tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là 2. Một số học sinh thì phát hiện ra quy luật khác, các em nhận ra số hạng thứ n trong dãy số này là số chính phương n^2 :

				...	
$s_1 = 1$	$s_2 = 1 + 3$	$s_3 = 1 + 3 + 5$	$s_4 = 1 + 3 + 5 + 7$...	$s_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$
$s_1 = 1$	$s_2 = 2^2$	$s_3 = 3^2$	$s_4 = 4^2$...	$s_n = n^2$

Dãy số ngũ giác: Tương tự học sinh tìm ra số hạng thứ n của dãy số này là tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là 3:

				...	
$p_1 = 1$	$p_2 = 1 + 4$	$p_3 = 1 + 4 + 7$	$p_4 = 1 + 4 + 7 + 10$...	$p_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n-2) = n(3n-1)/2$

Học sinh không dừng lại ở việc tìm kiếm số hạng tổng quát của các dãy số tam giác, hình vuông và ngũ giác mà còn tự mình đặt các câu hỏi để khám xa hơn về tình huống các số hình này. Các em thắc mắc liệu có thể dự đoán số hạng

tổng quát của một dãy số lục giác và dãy số k -giác với $k \geq 3$ từ tình huống này hay không. Một số học sinh đã nhìn ra được sự tương tự khi tìm kiếm quy luật dự đoán số hạng tổng quát của dãy số tam giác, hình vuông và ngũ giác. Các em

nhận thấy t_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là 1 đến s_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là 2 và p_n là tổng n số

hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là 3. Từ đó các em đưa ra giả thuyết của mình về số hạng tổng quát h_n của một dãy số lục giác:

$$\begin{aligned} \text{Tam giác: } t_n &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{Tứ giác: } S_n &= 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \\ \text{Ngũ giác: } P_n &= 1 + 4 + 7 + \dots + 3n - 2 = \frac{n(3n-1)}{2} \\ \text{Lục giác: } q_n &= 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = \frac{n}{2}(1 + 4n - 3) = \frac{n}{2}(4n - 2) \end{aligned}$$

Có thể nói học sinh đã sử dụng kiểu suy luận ngoại suy khi mở rộng khám phá trong tình huống này. Từ việc nhận ra quy luật đối với số hạng tổng quát của dãy số tam giác, hình vuông và ngũ giác, bằng cách tương tự học sinh đi đến giả thuyết về số hạng tổng quát của dãy số lục giác. Các em cũng nhận thấy số hạng tổng quát của dãy số tam giác, hình vuông, ngũ giác và lục giác đều có số hạng đầu là 1 và công sai bằng số cạnh của các hình đó trừ đi 2 nên các em cũng

đề xuất một giả thuyết về số hạng tổng quát của một dãy số k -giác với $k \geq 3$ là tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai là $k-2$ hay $u_n = \frac{n}{2}(2 + (n-1)(k-2))$.

Một số học sinh còn tiến hành những khám phá xa hơn khi cố gắng tìm kiếm mối liên hệ giữa các số hình này. Các em đưa ra một số dự đoán thú vị khi cố gắng tìm kiếm mối liên hệ giữa các số hình dựa trên biểu diễn hình học của chúng:

$s_n = t_{n-1} + t_n$	$p_n = n + 3t_{n-1}$

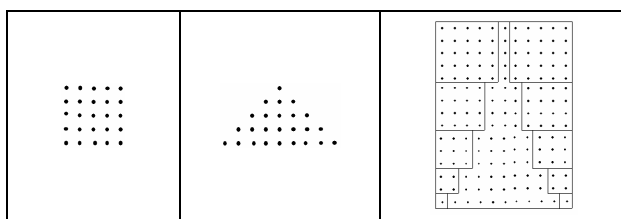
Có thể thấy năng lực giao tiếp toán học bằng các biểu diễn bội của học sinh sẽ được phát huy khi các em làm việc trong môi trường khảo sát toán. Học sinh không những làm toán với các biểu diễn đại số mà các em còn dùng các biểu diễn hình học như một phương tiện để tiến hành quá trình suy luận ngoại suy nhằm tìm kiếm các giả thuyết khi tiến hành quá

trình khảo sát toán. Bên cạnh đó, việc cố gắng tìm kiếm biểu diễn bội trong quá trình khảo sát toán đã làm cho trí tưởng của học sinh phong phú hơn. Học sinh đã đưa ra được một số dạng biểu diễn khác nhau của dãy số (n^2) . Từ đây các em cũng tìm ra mối liên hệ giữa các dạng biểu diễn khác nhau của dãy số (n^2) với mô

hình học biểu diễn tổng $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Các em đã sử dụng mối liên hệ giữa các biểu diễn hình học đó để dự đoán kết quả của S_2 khi nhận thấy

$$3S_2 = (1+2+\dots+n)(2n+1) \text{ nên } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sau đó các em dùng phép chứng minh quy nạp để kiểm chứng dự đoán của mình.



Một số học sinh còn tiến hành những khám phá xa hơn khi cố gắng tìm kiếm phương pháp tính trực tiếp S_2 . Các số hạng $1^2, 2^2, \dots, n^2$ trong tổng này làm các em liên tưởng đến việc sử dụng các hằng đẳng thức dạng $(1+x)^2$ với $x=0, 1, 2, \dots, n$. Tuy nhiên khi các em cộng các hằng đẳng thức

về theo về thì các số hạng $1^2, 2^2, \dots, n^2$ bị triệt tiêu nhưng lại tìm ra tổng $S_1 = 1+2+\dots+n$. Điều đó làm cho các em nghĩ đến việc dùng các hằng đẳng thức dạng tương tự nhưng bậc phải cao hơn 1 đơn vị là $(1+x)^3$. Các em thay $x=0, 1, 2, \dots, n$ vào hằng đẳng thức dạng $(1+x)^3$:

$$\begin{aligned} 1^3 - 1^3 &= 0 \\ 2^3 - 1^3 &= (1+1)^3 - 1^3 = 1^3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\ 3^3 - 2^3 &= (1+2)^3 - 1^3 = 1^3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\ \dots & \\ (n+1)^3 - n^3 &= (1+n)^3 - 1^3 = 1^3 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2 + n^3 \\ \Rightarrow (n+1)^3 - (n+1) &+ 3(1+2+\dots+n) + 3(1^2+2^2+\dots+n^2) \\ S_2 &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - (n+1) - \frac{3(n+1)n}{2} \right) = \frac{(n+1) \left((n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n \right)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Một số học sinh không dừng lại ở việc tìm ra tổng S_2 , bằng cách tương tự các em cho rằng có thể dùng các hằng đẳng thức dạng $(1+x)^4$ để tính tổng $S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$. Rõ ràng, dự đoán của các em là chính xác. Có thể thấy môi trường khảo sát toán đã mang đến cho học sinh nhiều cơ hội để khám phá kiến thức toán. Các em không bị gò bó vào các phương pháp giải quyết các bài toán được trình bày trong sách giáo khoa mà cố gắng tìm kiếm các con đường tiếp cận

khác cho riêng mình. Các em tự do đề xuất các giả thuyết và theo đuổi các ý tưởng để tìm kiếm cho mình những kết quả mới và thú vị bằng cách tiến hành các hoạt động ngoại suy, quy nạp, tương tự, tìm kiếm quy luật và tổng quát hóa. Bên cạnh đó, việc khám phá các tình huống khảo sát mở còn mang đến cơ hội cho học sinh tìm ra các phương án giải quyết vấn đề phù hợp với khả năng của bản thân mình. Có thể thấy rõ điều này qua việc phân tích đáp ứng của học sinh với tình huống tài khoản tiết kiệm.

Tình huống 2 (tài khoản tiết kiệm).
 Một khách hàng muốn gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền 1.000.000đ. Có hai phương án để khách hàng đó lựa chọn, phương án thứ nhất là có thể nhận lãi suất 7%/năm hoặc phương án thứ hai là nhận ngay một phần thưởng 10.000đ của ngân hàng và lãi suất 6%/năm. Bạn có thể tư vấn cho hành khách đó nên chọn gói kí gửi nào?

Tình huống này được thiết kế để dạy phân công thức lãi kép trong bài Lũy thừa với số mũ thực, chương Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit, Giải tích 12 Nâng cao. Đây được xem là một tình huống đích thực với bối cảnh xã hội gắn liền với kinh nghiệm hàng ngày của học sinh đòi hỏi phải các em phải sử dụng kiến thức toán để khám phá. Một số học sinh cho rằng khách hàng đó chọn phương án nào trong hai phương án được đưa ra thì lãi suất sau một năm cũng giống nhau. Nếu chọn phương án thứ nhất thì sau một năm khách hàng đó nhận được số tiền lãi là $7\% \times 1.000.000 = 70.000$ đ còn nếu chọn phương án thứ hai thì sau một năm khách hàng cũng nhận được số tiền lãi là $10.000 + 6\% \times 1000.000 = 70.000$ đ. Tuy nhiên một số học sinh lại có ý kiến khác. Các em cho rằng nếu gửi trong vòng một năm thì phương án thứ hai sẽ mang về tiền lãi nhiều hơn bằng cách đem 10.000đ tiền thưởng gửi tiếp vào ngân hàng. Lúc đó tiền lãi của khách hàng sau một năm

$$10.000 + 6\% \times (1.000.000 + 10.000) = 70.600\text{đ.}$$

Một số học sinh lại không đồng ý với ý kiến trên, các em cho rằng nếu đem

10.000đ tiền thưởng gửi tiếp vào ngân hàng nhưng theo phương án thứ nhất thì sẽ có thêm tiền lãi là $7\% \times 10.000 = 700$ đ và khách hàng sẽ nhận được số tiền lãi trong một năm là

$$10.000 + 6\% \times 1.000.000 + 7\% \times 10.000 = 70.700\text{đ}$$

Một số học sinh khác còn tiến hành những khảo sát xa hơn khi tìm kiếm phương án tối ưu cho khách hàng đó với kì hạn từ 2 năm trở lên. Các em cho rằng nếu gửi từ hai năm trở lên thì phương án thứ hai sẽ mang về cho khách hàng đó số tiền lãi nhiều hơn. Các em lí giải ý kiến của mình như sau:

$$\text{Phương án 1: } x(1+0,07)^n.$$

$$\text{Phương án 2: } (x+10.000)(1+0,06)^n$$

với x là số tiền gốc, n là số năm gửi.

Xét tỉ số

$$\begin{aligned} A &= \frac{x(1+0,07)^n}{(x+10.000)(1+0,06)^n} \\ &= \frac{100}{101} \left(\frac{107}{106} \right)^n < 1 \Leftrightarrow n \leq 1, (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Với $n=1$ thì $A < 1$ nên chọn phương án 2.

Với $n \geq 2$ thì $A > 1$ nên chọn phương án 1.

Có thể thấy học sinh đã đưa ra nhiều ý tưởng khác nhau khi khám phá tình huống thực tế trong môi trường khảo sát toán. Điều đó thể hiện mức độ phân kì trong tư duy của học sinh khi các em được tự do trao đổi và tranh luận các ý tưởng toán học của mình với bạn học. Khi học sinh làm việc với những tình huống mở và đòi hỏi phải đưa ra nhiều sự lựa chọn thì tư duy của các em hướng đến việc tìm ra phương án tối ưu để giải

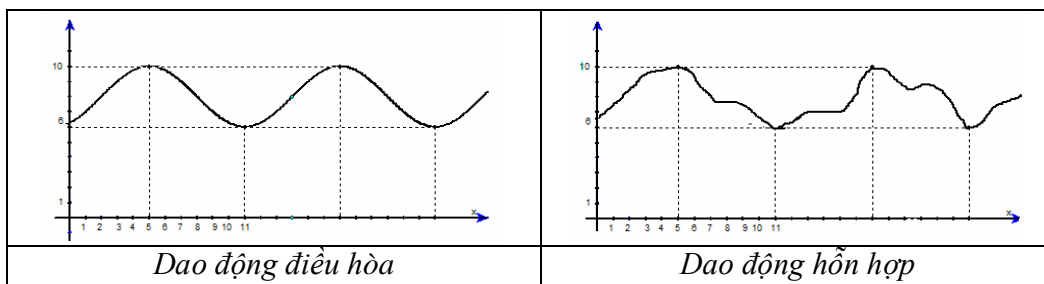
quyết vấn đề. Bên cạnh đó việc tiến hành các hoạt động khảo sát toán trên các tình huống mở còn mang đến nhiều cơ hội để học sinh đặt ra các vấn đề mới để tự mình khám phá. Tùy theo trí tưởng tượng và khả năng sáng tạo của mình mà các em có thể đặt ra cho mình các vấn đề phù hợp để khám phá tình huống ban đầu. Các em không chỉ tìm ra nhiều con đường khác nhau để giải quyết vấn đề mà còn sáng tạo ra các bài toán phù hợp với khả năng của mình để theo đuổi. Có thể thấy rõ điều này qua việc phân tích đáp ứng của học sinh đối với tình huống thủy triều.

Tình huống 3 (thủy triều). Thuyền trưởng của các tàu chở hàng thường phải chú ý đến thủy triều khi muốn cho tàu cập một bến cảng nào đó vì mực nước triều tại cảng đó có thể thay đổi rất lớn từ thời điểm này đến thời điểm khác trong một ngày. Giả sử rằng chế độ thủy triều tại cảng Chân Mây là bán nhật triều với đỉnh triều xảy ra lúc 5h và 17h, mực nước triều lúc đó là 10m và chân triều xảy ra lúc 11h và 23h, mực nước triều lúc đó là 6m. Hãy vẽ một đồ thị mà nó có thể dự báo mực nước triều tại cảng Chân Mây kể từ lúc 0h.

Tình huống này được thiết kế để dạy tiết tự chọn trong chương Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số, Giải tích 12 Nâng cao. Hầu hết các bài toán về khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đều bắt đầu bằng việc cho một hàm số và yêu cầu học sinh khảo sát và vẽ đồ thị

của hàm số đó. Tình huống này mang đến cho học sinh một trải nghiệm khác về các bài toán vẽ đồ thị của hàm số bằng cách sử dụng những số liệu của bài toán để mô phỏng đồ thị và sau đó là tìm hàm số tương ứng.

Đây là một tình huống mở về phía giả thiết đòi hỏi người học phải thêm giả thiết vào để khảo sát. Tùy theo khả năng sáng tạo của bản thân mà mỗi học sinh có thể chọn cho mình một mục đích để khám phá. Vận dụng kiến thức được học từ môn Vật lí, hầu hết học sinh cho rằng mực nước triều tại bến cảng này dao động theo dạng sóng. Bên cạnh đó, kiến thức về dao động sóng mà các em đã được biết là dao động điều hòa nên các em thêm vào giả thiết là “dao động của mực nước triều là dao động điều hòa” để khám phá tình huống này. Các em đều hình dung được mực nước triều dao động theo dạng đồ thị một hàm sin hoặc hàm cosin. Từ đó các em đưa ra được một đồ thị mà có thể dự báo được mực nước triều tại cảng này. Một số học sinh cho rằng dao động của mực nước triều không nhất thiết là một dao động điều hòa mà nó có thể là một dao động hỗn hợp. Các em đưa ra đồ thị có thể mô tả mực nước triều theo dạng dao động hỗn hợp tại cảng này. Có thể thấy mức độ phân kì trong tư duy của học sinh khi các em khảo sát các tình huống mở:



Học sinh còn tiến hành những hoạt động khảo sát xa hơn khi tìm kiếm hàm số tương ứng với đồ thị trên trong trường hợp dao động của mực nước triều là một dao động điều hòa bằng cách viết phương trình của một dao động sóng

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) + 8 \text{ hoặc } f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{5\pi}{6}\right) + 8$$

Còn với trường hợp dao động hỗn hợp thì các em chưa tìm ra được hàm số tương ứng với nó. Điều đó cũng có thể lí giải được vì để tìm ra một phương trình cho một dao động hỗn hợp đòi hỏi thêm kiến thức toán cao cấp vượt ra khỏi hiểu biết của các em học sinh ở bậc trung học phổ thông.

Có thể thấy học sinh đã vận dụng một cách linh hoạt kiến thức và kĩ năng liên môn khi khám phá tình huống này. Các em đã vận dụng một cách linh hoạt hiểu biết của mình để giải quyết các tình huống thực tế. Các em đã biết chuyển từ tình huống thực tế thành một bài toán và tìm kiếm phương hướng giải quyết bài toán đó rồi lí giải kết quả của bài toán đó theo tình huống thực tế. Việc khám phá các tình huống thực tế trong môi trường khảo sát toán đã mang đến nhiều cơ hội để học sinh phát huy năng lực mô hình hóa. Ngoài ra những tình huống khảo sát mở còn tạo điều kiện cho các em phát

huy trí tưởng tượng và sáng tạo của bản thân mình. Chuẩn bị cho học sinh thành công với những tình huống này là chuẩn bị cho các em năng lực giải quyết vấn đề để thành công trong cuộc sống hàng ngày của các em sau này.

Kết quả từ việc phân tích đáp ứng của học sinh trong môi trường khảo sát toán và phỏng vấn các em sau các tiết học đó cho thấy tính tích cực nhận thức trong quá trình khảo sát toán của các em thể hiện ở nhiều phương diện khác nhau:

- Hứng khởi và thích thú khi khám phá các tình huống chứa đựng những yếu tố kích thích và mang tính thách thức.
 - Tập trung và kiên trì theo đuổi các ý tưởng của mình trong quá trình khảo sát toán.
 - Thoải mái giao tiếp các ý tưởng toán với bạn học.
 - Tự mình tìm kiếm và đặt ra các câu hỏi để tiến hành các khảo sát xa hơn...
- Tính sáng tạo trong quá trình khảo sát toán của học sinh cũng được biểu hiện ở nhiều khía cạnh khác nhau:
- Đặt ra được nhiều câu hỏi và nhiều vấn đề để khám phá tình huống ban đầu đặc biệt là trong các tình huống mở.
 - Đưa ra được nhiều giả thuyết bằng các hoạt động thực nghiệm toán, suy luận quy nạp và suy luận ngoại suy.

- Tìm kiếm quy luật bằng hoạt động đặc biệt hóa, đoán-thử và khái quát hóa.

- Mở rộng tình huống ban đầu và tìm kiếm phương thức giải quyết vấn đề qua hoạt động tương tự.

- Tìm kiếm được nhiều phương án giải quyết vấn đề, nhiều lời giải khác nhau khi khám phá các tình huống mở...

3. Kết luận

Nhiều học sinh có cảm giác sợ môn toán và thụ động khi học môn học này là do việc dạy học toán trong nhà trường phổ thông thường chú trọng nhiều đến việc đưa ra được các câu trả lời đúng. Trong khi đó, khảo sát toán là một tiếp cận dạy học mang đến cho học sinh nhiều cơ hội khám phá kiến thức toán trong một môi trường học tập thú vị và mang tính tương tác cao. Ở đó, học sinh được tự do theo đuổi các ý tưởng phù hợp với mức độ nhận thức của chính mình mà không bị ràng buộc bởi việc phải đưa ra được những câu trả lời đúng. Các em có nhiều cơ hội giao tiếp các ý tưởng toán một cách thoải mái với bạn học. Điều này mang đến cho học sinh một tâm thế hứng

khởi khi bước vào các giờ học toán. Đây được xem là yếu tố cơ bản để thúc đẩy tính tích cực nhận thức trong quá trình học toán của các em. Bên cạnh đó, việc học sinh được khuyến khích khám phá kiến thức thông qua quá trình thực nghiệm toán bằng các hoạt động quan sát, đoán và thử, đặc biệt hóa, tìm kiếm quy luật, tương tự, khái quát hóa... trong quá trình khảo sát toán đã mang đến nhiều cơ hội để các em phát huy năng lực sáng tạo của bản thân mình. Những hoạt động khảo sát toán với các tình huống thực tế mà học sinh cần mô phỏng để hiểu và sử dụng chúng cũng tạo ra môi trường để học sinh phát huy năng lực mô hình hóa toán học của mình. Vì thế, các giáo viên toán cần tích hợp tiếp cận khảo sát toán vào việc dạy học của mình để đổi mới việc học toán của học sinh trong nhà trường phổ thông hướng đến phát huy năng lực hiểu biết toán và sử dụng toán để giải quyết các vấn đề thực tiễn nhằm chuẩn bị cho các em thành công trong cuộc sống sau này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trương Thị Khánh Phương (2011), "Sử dụng biểu diễn trực quan động hỗ trợ suy luận quy nạp và ngoại suy của học sinh trong quá trình khám phá toán học", *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*, 56(5), tr. 109-116.
2. Trần Vui (2010), "A combined abduction-induction strategy in teaching mathematics to gifted students-with-computers through dynamic representations", *Proceedings of APEC Conference on Replicating Exemplary Practices in Mathematics Education*, pp. 1-10, Samui, Thailand.
3. Bailey, J. (2007), "Mathematical investigations: A primary teacher educator's narrative journey of professional awareness", *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Mathematics: Essential research, essential practice*, Vol.1, pp. 103-112, Adelaide.

4. Flewelling, G. & Higginson, W. (2002), *Teaching with rich learning tasks: A handbook*, Australian Association of Mathematics Teachers, Adelaide.
5. Jaworski, B. (1994), *Investigating mathematics learning: A constructivist enquiry*, Falmer Press, London.
6. Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998), “Investigating mathematical investigations”, *Proceedings of the CIEAEM 49: Les interactions dans la classe de mathématiques*, pp. 3-14, Setúbal: ESE de Setúbal.
7. Quinnell, L. (2010), “Why are Mathematical Investigations important?”, *Australian Mathematics Teacher*, Vol. 66, No.3, pp. 35-40.
8. Sullivan, P. & Lilburn, P. (2002), *Good Questions for Math Teaching: Why Ask Them and What to Ask [K-6]*, Math Solutions Publications, Sausalito, CA.
9. Yea, J. B.W. & Yeap, B.H. (2010), “Charaterising the Cognitive Processes in Mathematical Investigation”, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, No. 05.10, pp. 1-10.

Người phản biện khoa học: TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 25-7-2013; ngày phản biện đánh giá: 16-8-2013;

ngày chấp nhận đăng: 16-9-2013)

CÁC SỐ TẠP CHÍ KHOA HỌC SẮP TỚI:

- Tháng 10/2013: Số 51(85) – Khoa học tự nhiên và công nghệ
- Tháng 11/2013: Số 52(86) – Khoa học xã hội và nhân văn
- Tháng 12/2013: Số 53(87) – Khoa học giáo dục

Ban biên tập Tạp chí Khoa học rất mong nhận được sự trao đổi thông tin của các đơn vị bạn và được bạn đọc thường xuyên cộng tác bài vở, góp ý xây dựng.