SIÊU MẶT f-CỰC TIỂU VÀ NGHIỆM TỰ ĐỒNG DẠNG CỦA DÒNG ĐỘ CONG TRUNG BÌNH

NGUYỄN THỊ MỸ DUYÊN
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và ví dụ về mặt f-cực tiểu, dòng độ cong trung bình và nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình. Trong phần cuối của bài báo này, chúng tôi chỉ rõ mối quan hệ giữa mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình.

Từ khóa: Mặt f-cực tiểu; siêu mặt f-cực tiểu; dòng độ cong trung bình; nghiệm tự đồng dạng.

Title: f-MINIMAL HYPERSURFACES AND SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF MEAN CURVATURE FLOW

Abstract: In this paper, we present the notions and examples of the f-minimal surfaces, the mean curvature flows and their self-similar solutions. In the end of this paper, we show the relations between the self-similar solutions of mean curvature flows and the f-minimal surfaces.

Keywords: f-minimal surface; f-minimal hypersurface; mean curvature flow; self-similar solution.

Giới thiệu

Đa tạp với mật độ là một đa tạp Riemann trơn n-chiều với hàm mật độ trơn, dương e^{-f} được sử dụng làm trọng số cho thể tích k-chiều (trường hợp 1-chiều gọi là độ dài, ký hiệu là l, trường hợp 2-chiều gọi là diện tích, ký hiệu là A và trường hợp 3-chiều gọi là thể tích, ký hiệu là V). Giả sử dV là phần tử thể tích k-chiều Riemann. Khi đó, phần tử thể tích k-chiều theo mật độ e^{-f}, ký hiệu dV_f được cho bởi công thức

$$dV_f = e^{-f}dV.$$

Chú ý rằng định nghĩa trên không tương đương với việc nhân một hệ số vào metric vì khi đó các phần tử thể tích k-chiều và $(k-1)$-chiều có số mũ $-f$ (của hàm mật độ) khác nhau. Trong một số bài toán, người ta xét các hàm mật độ của các thể tích k-chiều và $(k-1)$-chiều khác nhau.

Một số ví dụ sau cho thấy đa tạp với mật độ xuất hiện một cách tự nhiên trong Toán học, Vật lý và Kinh tế.

Xét đường cong C trên nửa mặt phẳng trên đóng Ơclit (biên Ox) và mặt tròn xoay S được sinh ra bởi đường cong C khi xoay quanh trục Ox. Khi đó, diện tích $A(S)$ của mặt S tương ứng với độ dài $l(C)$ của đường cong C trên nửa mặt phẳng với mật độ $2\pi y$. Thật vậy, giả đường cong C cho bởi tham số $x(t) = \big(t, y(t)\big), t \in (a,b) \subset \mathbb{R}, y(t) > 0$ và S là mặt tròn xoay được sinh ra bởi C khi quay quanh trục Ox. Khi đó, chúng ta có:

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(t)}dt \quad \text{và} \quad A(S) = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{1+y'^2(t)}dt.$$

Do đó, chúng ta có thể xem nửa mặt phẳng trên với mật độ $2\pi y$ là không gian thương của $\mathbb{R}^3$ với quan hệ tương đương "cùng khoảng cách đến trục Ox".

Trong Vật lý, một đối tượng có thể có mật độ nội tại khác nhau tại các điểm khác nhau. Do đó, để xác định khối lượng của nó ta phải tính tích phân theo mật độ.

Một không gian với mật độ được sử dụng nhiều trong toán học cũng như trong lĩnh vực kinh tế đó là *không gian Gauss* $\mathbb{G}^n$, không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ Gauss $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r^2}{2}}$, ở đó r là khoảng cách từ điểm đến gốc tọa độ. Trong không gian này, mật độ tập trung vào gốc tọa độ và giảm rất nhanh khi di chuyển ra ngoài (Hình 1).

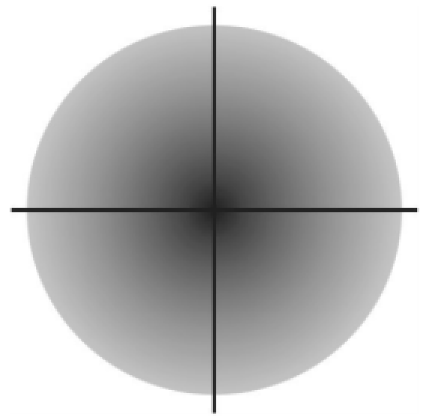
Trên mặt phẳng Gauss, độ dài của trục hoành bằng

$$\ell_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{2\pi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dễ dàng kiểm tra được độ dài của một đường cong chính quy bất biến qua phép quay tâm O, góc quay bất kỳ. Từ đó suy ra, các đường thẳng qua gốc tọa độ có độ dài theo mật độ bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Diện tích theo mật độ của mặt phẳng Gauss $\mathbb{G}^2$ bằng

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_f(\mathbb{G}^2) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-(x(t)^2+y(t)^2)/2}}{2\pi}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi}dxdy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy\right) = 1.\end{aligned}$$



Hình 1: *Mật độ của không gian Gauss tập trung về gốc tọa độ, giảm rất nhanh khi di chuyển khỏi gốc tọa độ.*

Độ dài theo mật độ của đường tròn tâm O bán kính R bằng Re^{-R^2} và diện tích theo mật độ của đĩa tròn $B(O, R)$ tâm O bán kính R bằng

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R re^{-r^2/2}drd\theta = 1 - e^{-R^2/2}.$$

Tổng quát khái niệm không gian Gauss là khái niệm *đa tạp với mật độ cầu*, hàm mật độ $e^{-f(r)}$, trong đó r là khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm đang xét, f là một hàm trơn.

Ngoài ra, một không gian với mật độ thường gặp nữa là *không gian với mật độ* log-*tuyến tính*, không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ $e^{-f(x)}$, trong đó $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$. Trong không gian này, tập hợp tất cả các điểm có cùng mật độ là một siêu phẳng. Vì vậy, bằng một phép đổi tọa độ thích hợp, ta có thể giả thiết hàm mật độ có dạng e^{-x_n}. Do đó, ta có thể xem không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ $e^{-f(x)}$ như là tích $\mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}_f$, trong đó $\mathbb{R}^{n-1}$ là không gian Ơclit $(n-1)$-chiều và $\mathbb{R}_f$ là đường thẳng thực với mật độ e^{-x_n}.

Cuối cùng, giả sử M_1 và M_2 là hai đa tạp Riemann với hàm mật độ tương ứng là $e^{-h_1(x)}$ và $e^{-h_2(x)}$. Trên đa tạp tích $M_1 \times M_2$, chúng ta xét hàm mật độ $e^{-f(x,y)} = e^{-(h_1(x)+h_2(y))}$ với mọi $x \in M_1$, $y \in M_2$. Khi đó, phần tử thể tích k-chiều theo mật độ của $M_1 \times M_2$ được xác định bởi

$$dV_f = e^{-(h_1+h_2)}dV_{M_1}dV_{M_2}.$$

Chúng ta gọi $M_1 \times M_2$ với mật độ như trên là *đa tạp với mật độ tích* hay *tích của các đa tạp với mật độ*.

Với khái niệm trên, chúng ta có thể xem không gian Gauss là tích của các đường thẳng Gauss.

Sau đây, chúng ta sẽ đi vào các nội dung chính của bài báo này.

1 Siêu mặt f-cực tiểu [3, 4, 7]

Theo Gromov [4], một cách tổng quát, độ cong trung bình theo mật độ của một siêu mặt được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.0.1. ([4]) Trên một đa tạp với mật độ e^{-f}, *độ cong trung bình theo mật độ* hay *f-độ cong trung bình* của một siêu mặt được xác định bởi công thức:

$$H_f = H + \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle ,$$

trong đó H là độ cong trung bình Ơclit, $\mathbf{n}$ là trường pháp véctơ đơn vị của siêu mặt và ∇f là gradient của hàm f.

Một siêu mặt với f-độ cong trung bình $H_f = 0$ được gọi là *siêu mặt cực tiểu với mật độ* hay *siêu mặt f-cực tiểu.*

Nhận xét 1. 1. *Trong không gian $\mathbb{R}^n$, độ cong trung bình của siêu mặt thỏa mãn công thức biến phân thứ nhất của phiếm hàm diện tích:*

$$\frac{dA}{dt} = -\int_{\Sigma} (n-1) H ds.$$

2. *Với định nghĩa trên, độ cong trung bình theo mật độ của siêu mặt cũng thỏa mãn công thức biến phân thứ nhất theo mật độ của phiếm hàm diện tích theo mật độ một cách tương tự [3]:*

$$\frac{dA_f}{dt} = -\int_{\Sigma} (n-1) H_f ds_f.$$

Từ công thức của f-độ cong trung bình, rõ ràng nếu chúng ta biết được ý nghĩa hình học của đại lượng $\langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle$ thì chúng ta có thể tìm ra được một số mặt f-cực tiểu đơn giản.

Ví dụ 1.0.1. ([5]) Dễ thấy, trong không gian Gauss $\mathbb{G}^3$, đại lượng $|\langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng tiếp xúc tại điểm tương ứng của mặt. Do đó, chúng ta có thể kiểm tra được một số kết quả trong không gian Gauss $\mathbb{G}^3$ như sau:

1. Các mặt phẳng là mặt có f-độ cong trung bình hằng. Đặc biệt, các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ là các mặt f-cực tiểu;

2. Các mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ là mặt có f-độ cong trung bình hằng. Đặc biệt, nếu các mặt cầu này có bán kính bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì chúng là các mặt f-cực tiểu.

3. Các mặt trụ tròn với trục đi qua gốc tọa độ là mặt có f-độ cong trung bình hằng. Đặc biệt, nếu mặt trụ này có bán kính bằng 1 thì nó là mặt f-cực tiểu.

Ví dụ 1.0.2. ([5]) Trong không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ log-tuyến tính, $e^{-f(x)}$. Theo trên ta có thể giả thiết hàm mật độ có dạng e^{-x_n}. Khi đó, $\nabla f = (0, 0, \ldots, 1)$ nên $\langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle$ chính là cosin của góc giữa $\mathbf{n}$ và trục Ox_n. Vì vậy, từ định nghĩa của f-độ cong trung bình, chúng ta dễ thấy rằng H_f không thay đổi qua phép tịnh tiến hoặc phép quay quanh trục Ox_n. Hơn nữa, chúng ta có thể kiểm tra được một số kết quả trong không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ e^{-x_n} như sau:

1. Các siêu phẳng là các mặt có f-độ cong trung bình hằng. Đặc biệt, các siêu phẳng song song với trục Ox_n là các mặt f-cực tiểu;

2. Các siêu trụ tròn với trục song song với trục Ox_n là các mặt có f-độ cong trung bình hằng.

Ví dụ 1.0.3. ([6]) Tương tự như trong không gian Gauss $\mathbb{G}^3$, trong không gian tích $\mathbb{G}^2 \times \mathbb{R}$, đại lượng $|\langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle|$ là khoảng cách từ hình chiếu của điểm tương ứng của mặt lên trục Oz đến mặt phẳng tiếp xúc của mặt tại điểm đó. Do đó, chúng ta có thể kiểm tra được một số kết quả trong không gian $\mathbb{G}^2 \times \mathbb{R}$ như sau:

1. Các mặt phẳng song song với trục Oz có f-độ cong trung bình hằng. Đặc biệt, các mặt phẳng chứa trục Oz là các mặt f-cực tiểu.

2. Các mặt phẳng $z = a,\ a \in \mathbb{R}$ là các mặt f-cực tiểu.

3. Các mặt trụ đứng với trục Oz có f-độ cong trung bình hằng. Đặc biệt, nếu mặt trụ này có bán kính 1 thì nó là mặt f-cực tiểu.

4. Helicoid có tham số $X_H(u, v) = (\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u)$ với $-\pi < u \leq \pi$, $-\infty < v < \infty$ là mặt f-cực tiểu.

5. Catenoid có tham số $X_C(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ với $-\pi < u \leq \pi$, $-\infty < v < \infty$ là mặt có f-độ cong trung bình bằng 1.

6. Mặt tham số $(S) : X(u, v) = \cos\theta X_H + \sin\theta X_C,\ -\pi < \theta \leq \pi$, có f-độ cong trung bình là hằng số.

Tiếp theo, chúng ta đi vào một đối tượng chính thứ hai của bài báo này.

2 Dòng độ cong trung bình và nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình [1, 2]

2.1 Dòng độ cong trung bình

Từ các tài liệu [1] và [2], chúng ta có thể có cái nhìn tổng quan về dòng độ cong trung bình và nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình như sau:

Định nghĩa 2.1.1. Dòng độ cong trung bình là họ (một tham số) $(F_t)_{t\in I}$ các siêu mặt di chuyển theo hướng vector pháp với vận tốc bằng độ cong trung bình của mặt. Trường hợp 1-chiều của dòng độ cong trung bình được gọi là dòng các đường cong. Cụ thể hơn:

Cho M là một siêu mặt trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$. Một phép nhúng phụ thuộc thời gian

$$F_t = F(., t) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

trong đó $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, là một nghiệm của dòng độ cong trung bình nếu

$$\frac{\partial}{\partial t}F(p, t) = H(p, t).N(p, t),\ p \in M,\ t \in [0, T],$$

với $H(p, t), N(p, t)$ lần lượt là độ cong trung bình và pháp véctơ đơn vị của siêu mặt $F_t(M)$ tại $F_t(p)$.

Ví dụ 2.1.1. Cho một siêu mặt cực tiểu chuyển động theo dòng độ cong trung bình. Do siêu mặt cực tiểu có độ cong trung bình $H = 0$ nên nó đứng yên. Vì vậy, có thể xem các siêu mặt cực tiểu là các nghiệm của dòng độ cong trung bình.

2.2 Nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình

Chúng ta xét một số ví dụ đặc biệt về dòng độ cong trung bình.

Trong các nghiệm của dòng độ cong trung bình, có một loại nghiệm đặc biệt là nghiệm tự đồng dạng (self-similar). Trong đó, nghiệm tự đồng dạng co rút và nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến là hai loại nghiệm tự đồng dạng.

Một nghiệm của dòng độ cong trung bình được gọi là *tự đồng dạng* nếu với mọi $t > t'$, F_t đồng dạng với $F_{t'}$. Một nghiệm tự đồng dạng phải suy biến ở thời gian t_0.

Bằng phép tịnh tiến thời gian t, chúng ta giả sử $t_0 = 0$. Khi đó $F_t = |t|^{1/2}F_{-1}$, và $F_{-1}(M)$ thỏa mãn phương trình

$$H(F_{-1}) = -\langle F_{-1}, N(F_{-1})\rangle .$$

Một số nghiệm tự đồng dạng đặc biệt như:

2.2.1 Nghiệm tự đồng dạng co rút

Định nghĩa 2.2.1. Cho $F(x,t) : M \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$ là một nghiệm của dòng độ cong trung bình. Nghiệm này được gọi là một nghiệm tự đồng dạng co rút (shrinker) nếu có hàm số dương $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ $(\lambda < 1)$ sao cho

$$F(x,t) = \lambda(t)F(x,0), \quad \forall (x,t) \in M \times [0,T].$$

Trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$, xét các nghiệm tự đồng dạng co rút của dòng độ cong trung bình dạng $F(x,t) = \lambda(t)F_0(x)$, trong đó $t \in [-1,0]$, $0 < \lambda(t) < 1$, $\lambda(-1) = 1$ và $\lambda(0) = 0$.

Khi đó, chúng ta có

$$\lambda'(t)F_0 = \big\langle H\big(\lambda(t)F_0\big), N\big(\lambda(t)F_0\big)\big\rangle .$$

Do $H\big(\lambda(t)F_0\big) = \dfrac{1}{\lambda(t)}H(F_0)$ và $N\big(\lambda(t)F_0\big) = N(F_0)$ nên chúng ta được

$$\lambda'(t)F_0 = \frac{1}{\lambda(t)}\langle H(F_0), N(F_0)\rangle \Longleftrightarrow H(F_0) = c\langle F_0, N(F_0)\rangle ,$$

trong đó $c = \lambda(t)\lambda'(t)$. Mà $H(F_0)$ độc lập với thời gian nên c là một hằng số và $\lambda(t) = \sqrt{2ct + d}, d \in \mathbb{R}$. Mặt khác, $\lambda(-1) = 1$, $\lambda(0) = 0$ nên $d = 0$ và $c = -\dfrac{1}{2}$, $\lambda(t) = \sqrt{-t}$. Vì vậy, người ta thường dùng đẳng thức $F(x,t) = \sqrt{-t}F(x,-1), t \in [-1,0]$ làm định nghĩa nghiệm tự đồng dạng co rút. Vậy, ta có một nghiệm tự đồng dạng co rút khi và khi nó thỏa mãn phương trình

$$H(x,t) + \frac{\langle F(x,t), N(x,t)\rangle}{2} = 0.$$

Ví dụ 2.2.2. *Các siêu cầu tự co rút.* Chọn $\mathcal{F} = \{F_t(M)\}$ là một họ các siêu cầu trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ với bán kính $\rho(t)$, tâm tại gốc tọa độ. Khi đó, dòng độ cong trung bình cảm sinh phương trình vi phân cho bán kính ρ,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{n}{\rho(t)}.$$

Do đó, chúng ta có

$$\rho(t) = \sqrt{\rho_0^2 - 2nt},$$

ở đó ρ_0 là bán kính của $F_0(M)$. Do đó, nghiệm của dòng độ cong trung bình tồn tại với $t \in \left(-\infty, \frac{\rho_0^2}{2n}\right)$.

Ví dụ 2.2.3. *Các siêu trụ tự co rút.* Xét họ các siêu trụ $F_t = S^{n-k}_{\rho(t)} \times \mathbb{R}^k$, với $0 \le k \le n$. Khi đó, chúng ta được

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{n-k}{\rho(t)}.$$

Do đó, chúng ta có

$$\rho(t) = \sqrt{\rho_0^2 - 2(n-k)t},$$

ở đó ρ_0 là bán kính của $F_0(M)$. Do đó, nghiệm của dòng độ cong trung bình tồn tại với $t \in \left(-\infty, \frac{\rho_0^2}{2(n-k)}\right)$.

2.2.4 Nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến

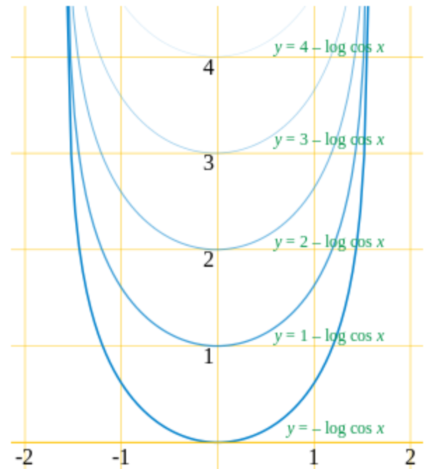
Định nghĩa 2.2.2. Cho $F(x,t) : M \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$ là một nghiệm của dòng độ cong trung bình. Nghiệm này được gọi là một nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến (translator) nếu tồn tại véctơ ξ sao cho:

$$F(x,t) = F(x,0) + t\xi, \quad \forall (x,t) \in M \times [0,T].$$

Ví dụ 2.2.5. Một ví dụ kinh điển về nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến là dòng đường cong Grim Reaper. Khi $n = 1$, có duy nhất một nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến, gọi là đường cong Grim Reaper (Hình 2), có thể biểu diễn bởi

$$x_2 = -\ln\cos x_1 + t, x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Có khá ít các kết quả liên quan đến nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến. Trong phần cuối của bài báo này, chúng tôi trình bày kết quả chính của bài báo - mối quan hệ giữa mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình. Một phần trong đó sẽ cho ta một số kết quả về nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến thông qua ngôn ngữ các mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ log-tuyến tính.



Hình 2: *Đường cong Grim Reaper*

3 Mối quan hệ giữa mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong rung bình

3.1 Mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng co rút

Theo trên, một mặt được gọi là f-cực tiểu nếu $H_f = H + \langle \nabla f, \mathbf{n}\rangle = 0$. Một nghiệm tự đồng dạng co rút có phương trình xác định $H + \dfrac{\langle F, \mathbf{n}\rangle}{2} = 0$. Sự tương đồng giữa 2 đẳng thức trên nảy sinh câu hỏi tự nhiên về mối quan hệ giữa các mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng co rút. Thật vậy, nếu xét trong một không gian với mật độ e^{-f} phù hợp thì một nghiệm tự đồng dạng co rút là một mặt f-cực tiểu và ngược lại. Ngoài ra, mối quan hệ đồng nhất này còn xảy ra giữa mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến. Và hai không gian mật độ xảy ra điều này cũng chính là hai không gian mật độ quan trọng: không gian với mật độ cầu (tương ứng với không gian với mật độ Gauss) và không gian với mật độ log-tuyến tính.

Mệnh đề 3.1.1. Nghiệm tự đồng dạng co rút của dòng độ cong trung bình là siêu mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ Gauss.

Xét không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ $e^{-r^2/4}$. Ta có

$$\nabla f = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}\right).$$

Khi đó f-độ cong trung bình của siêu mặt xác định bởi X được cho bởi

$$H_f = H + \frac{1}{2}\langle X, N\rangle.$$

Từ đó, chúng ta thấy rằng các siêu mặt f-cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ $e^{-r^2/4}$ là các nghiệm tự đồng dạng co rút của dòng độ cong trung bình.

Cần chú ý rằng mẫu số 4 ở hàm mật độ không đóng vai trò quan trọng. Chúng ta có thể thay đổi nó nếu thay đổi thời gian ban đầu (hoặc thời điểm xảy ra kỳ dị) đối với nghiệm tự đồng dạng co rút. Hơn nữa, nếu ta có M là mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ $e^{-r^2/4}$ thì ta có mặt $2M$ là mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ $e^{-r^2/2}$.

Vậy nghiệm tự đồng dạng co rút của dòng độ cong trung bình là siêu mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ Gauss.

Ví dụ 3.1.1.

1. Trong mặt phẳng Gauss $\mathbb{G}^2$, đường tròn tâm O, bán kính 1 là một mặt f-cực tiểu tương ứng với đường tròn bán kính 2 là nghiệm tự đồng dạng co rút trong $\mathbb{R}^2$.

2. Trong không gian Gauss $\mathbb{G}^3$, các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ, mặt cầu tâm O bán kính 1, các mặt trụ có trục Ox, Oy, Oz bán kính $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là các mặt f-cực tiểu lần lượt tương ứng với các mặt phẳng, mặt cầu bán kính 2, mặt trụ bán kính $\sqrt{2}$ là các nghiệm tự đồng dạng co rút trong $\mathbb{R}^3$.

3.2 Mặt f-cực tiểu và nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến

Mệnh đề 3.2.1. Nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến của dòng độ cong trung bình là mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ log-tuyến tính.

Xét không gian với mật độ log-tuyến tính $(\mathbb{R}^n, e^{-f})$ với $f = -ax_n$. Ta có $\nabla f = (0, 0, \ldots, -a)$.

Giả sử $X(x,t) = X(x) + vt$ với $v = (0, 0, \ldots, a)$ là một nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến của dòng độ cong trung bình. Khi đó Vì $\dfrac{\partial X}{\partial t}(x,t) = H(x)N(x)$ nên

$$\begin{aligned} H(x)N(x) = v &\Longrightarrow H = \langle v, N\rangle \\ &\Longrightarrow H = -\langle \nabla f, N\rangle \\ &\Longrightarrow H + \langle \nabla f, N\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \text{X là mặt } f\text{-cực tiểu} \end{aligned}$$

Ngược lại, cho $X(x,t) = X(x) + vt$ là mặt f-cực tiểu. Ta sẽ chỉ ra rằng $X(x,t) = X(x) + vt$ là nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình. Thật vậy, ta có

$\dfrac{\partial X}{\partial t}(x,t) = v$. Và vì $X(x,t)$ là mặt f-cực tiểu nên ta có $H - \langle v, N\rangle = 0$, do đó thành phần vuông góc của véctơ v là $(v)^{\perp} = HN$. Suy ra $(\dfrac{\partial X}{\partial t}(x,t))^{\perp} = H(x)N(x)$.

Chú ý rằng, nếu xét sai khác một phép vi phôi, định nghĩa nghiệm của dòng độ cong trung bình tương đương với

$$(\frac{\partial}{\partial t}F(p,t))^{\perp} = H(p,t).N(p,t),$$

Do đó $X(x,t)$ là nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến của dòng độ cong trung bình.

Mặt khác, bởi vì trong không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ log-tuyến tính, tập hợp tất cả các điểm có cùng mật độ là một siêu phẳng. Cho nên, bằng một phép đổi tọa độ thích hợp, ta có thể giả thiết hàm mật độ có dạng e^{-x_n}.

Vậy, nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến của dòng độ cong trung bình là mặt f-cực tiểu trong không gian với mật độ log-tuyến tính.

Ví dụ 3.2.1.

1. Trong mặt phẳng $(\mathbb{R}^2, e^y)$, mặt f-cực tiểu là đường thẳng song song với trục Oy hoặc đường cong Grim Reaper lần lượt tương ứng với đường thẳng và đường cong Grim Reaper là nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến trong $\mathbb{R}^2$.

2. Trong không gian $(\mathbb{R}^3, e^z)$ các mặt phẳng $x = c, y = c$ (c là hằng số) là các mặt f-cực tiểu lần lượt tương ứng với mặt phẳng là nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến trong $\mathbb{R}^3$.

3. Trong không gian $(\mathbb{R}^3, e^z)$, mặt với tham số hóa $X(u,v) = (u, v, -\ln(\cos v))$, $u \in \mathbb{R}, v \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ là các mặt f-cực tiểu [5], chúng tương ứng với nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến trong $\mathbb{R}^3$. Và như vậy, chúng ta có thêm một ví dụ về nghiệm tự đồng dạng tịnh tiến trong $\mathbb{R}^3$ từ kết quả về mặt f-cực tiểu.

Lời cảm ơn: Tôi xin chân thành cảm ơn Thầy giáo, PGS. TS. Đoàn Thế Hiếu và TS. Nguyễn Hà Thanh đã hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thiện bài báo này. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 101.04.2014.26.

Tài liệu tham khảo

[1] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II, "Generic mean curvature flow I; generic singularities", *Ann. of Math*, 175 (2) (2012), 755-833.

[2] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II and E. L. Pedersen, "Mean curvature flow", *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 52 (2) (2015), 297–333.

[3] I. Corwin, N. Hoffman, S. Hurder, V. Sesum, and Y. Xu, "Differential geometry of manifolds with density", *Rose-Hulman Und. Math. J.*, 7 (1) (2006).

[4] M. Gromov, "Isoperimetry of waists and concentration of maps", *Geom. Funct. Anal.*, 13 (2003), 178-215.

[5] D. T. Hieu, N. M. Hoang, "Ruled minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ with density e^z ", *Pacific Journal of Mathematics*, 243 (2) (2009), 277-285.

[6] D. T. Hieu, T. L. Nam, "Bernstein type theorem for entire weighted minimal graphs in $\mathbb{G}^n \times \mathbb{R}$", *Journal of Geometry and Physics*, 81 (2014), 89-91.

[7] F. Morgan, "Manifolds with density", *Notices Amer. Math. Soc.*, 52 (2005), 853-858.

THS. NGUYỄN THỊ MỸ DUYÊN
GV Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế.
SĐT: 0916 977 543; Email: ntmyduyen2909@gmail.com.