ĐẶC TRƯNG SUY LUẬN TOÁN HỌC CỦA SINH VIÊN TRONG QUÁ TRÌNH GIẢI TOÁN VỀ "NGUYÊN HÀM"

Nguyễn Đức Hồng
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế
Email: duchongmaths@gmail.com

Article history
Received: 02/4/2023
Accepted: 28/4/2023
Published: 05/7/2023

Keywords
Mathematical reasoning, problem solving, Antiderivatives, students

ABSTRACT
Mathematical reasoning is a basic competence of learners when learning Math. Therefore, developing mathematical reasoning for learners is a core task in the process of teaching and learning Mathematics. This study used Lithner's theoretical framework of mathematical inference to evaluate the mathematical reasoning competence of first-year students in the process of solving problems on Antiderivatives. The empirical research results show that imitation reasoning is dominant over creative reasoning. This means that students often rely on previously used solutions to solve math problems instead of inventing new ones. However, to encourage students to develop creative reasoning, it is necessary to have appropriate Math Teaching methods and encourage students to create new solutions.

1. Mở đầu

Suy luận toán học (SLTH) là một năng lực cơ bản của người học khi học Toán, không chỉ giúp họ tham gia vào quá trình chứng minh mà còn khuyến khích việc tiếp cận các khái niệm, tính chất và định nghĩa toán học một cách sâu sắc hơn. Bằng cách tập trung vào các khía cạnh hợp lí, các mối liên hệ trong môn học, SLTH cho phép người học vượt qua việc dựa vào những thông tin có sẵn và phát triển kĩ năng giải quyết vấn đề toán học một cách độc lập và hiệu quả. Do đó, phát triển SLTH cho người học là một nhiệm vụ cốt lõi trong quá trình giảng dạy và học tập toán học (Ball & Bass, 2003; Boaler, 2010).

Hiện nay, SLTH vận dụng vào giáo dục toán học là một hướng nghiên cứu được nhiều tác giả quan tâm. SLTH được nhiều tác giả đề cập như Pijls và Dekker (2011), Seidouvy và Schindler (2019), Sidenvall (2019), Lithner (2007, 2008, 2010),... Nhiều nghiên cứu đã sử dụng SLTH của Lithner (2007) trong dạy học Toán ở đại học, đặc biệt là dạy học Giải tích cho sinh viên (SV) những năm đầu đại học. Tuy nhiên, việc tiếp cận kiến thức Giải tích ở những năm đầu đại học đôi khi gây khó khăn cho SV, bởi các em phải tiếp cận với những kiến thức mang tính trừu tượng cao. Do đó, sử dụng SLTH để phân tích quá trình dạy học Giải tích cho SV giai đoạn này là một vấn đề cần được quan tâm trong bối cảnh đổi mới giáo dục hiện nay. Trong nghiên cứu này, chúng tôi tập trung phân tích đặc trưng SLTH của SV dựa trên lí thuyết SLTH của Lithner (2007) thông qua việc nêu rõ các đặc điểm SLTH của các em khi giải các bài toán về Nguyên hàm trong dạy học Giải tích.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Suy luận toán học

SLTH có thể được định nghĩa là: *"Hành động rõ ràng, biện minh cho các lựa chọn và kết luận bằng các lập luận toán học"* (Boesen at al., 2014, tr 75). Phù hợp với định nghĩa này là khung nhận thức SLTH của Lithner (2008), xác định 2 loại suy luận: suy luận sáng tạo toán học và suy luận bắt chước. Kiểu suy luận thứ hai được thể hiện rõ trong việc HS sử dụng các sự kiện và thuật toán đã ghi nhớ mà không cần xem xét ý nghĩa của chúng (Lithner, 2010). Cụ thể:

- *Suy luận sáng tạo toán học.* "Suy luận" có thể hiểu là dòng suy nghĩ, cách suy nghĩ, được sử dụng để đưa ra các khẳng định và đi đến kết luận. Suy luận không nhất thiết phải dựa trên logic suy diễn chính thức, thậm chí có thể không chính xác, nhưng cần có một số loại lập luận hợp lí (đối với người lập luận) trong cách suy nghĩ. Lập luận là chứng minh, một phần của lí lẽ nhằm thuyết phục bản thân hoặc người khác rằng lí do đó là phù hợp (Holtzblatt & Beyer, 2008). Đặc biệt, một tình huống giải quyết nhiệm vụ được gọi là tình huống có vấn đề nếu không rõ cách tiến hành.

Suy luận sáng tạo toán học cần thoả mãn các điều kiện sau: + Tính mới: Một trình tự lập luận giải pháp mới (đối với người lí giải) được tạo ra, hoặc một trình tự bị quên được tạo lại. Hoạt động bắt chước không có trong suy luận sáng tạo toán học; + Tính linh hoạt: Thừa nhận các cách tiếp cận và thích ứng khác nhau phù hợp với tình hình, không bị cố định, cản trở bởi tiến độ; + Tính hợp lí: Có những lập luận trong việc lựa chọn chiến lược/hoặc thực hiện chiến lược, thúc đẩy lí do tại sao các kết luận là đúng hoặc hợp lí. Điều này có nghĩa là những suy đoán thuần túy hay những trực giác mơ hồ sẽ không được xem xét; + Nền tảng toán học: Lập luận được xây dựng dựa trên các tính chất toán học nội tại của các thành phần liên quan đến lập luận.

- *Suy luận bắt chước (Imitative reasoning).* Suy luận bắt chước là sao chép hoặc làm theo một mô hình hoặc ví dụ mà không có bất kì nỗ lực nào về tính nguyên bản (Heymans & Verschaffel, 2011). Suy luận bắt chước bao gồm hai dạng là suy luận nhớ lại (memorised reasoning, MR) và suy luận thuật toán (algorithmic reasoning, AR). Cụ thể:

+ *Suy luận ghi nhớ (MR).* Suy luận bắt chước trong quá trình tìm ra giải pháp của một vấn đề sẽ được gọi là suy luận ghi nhớ nếu: (1) Lựa chọn chiến lược được thiết lập dựa trên việc nhớ lại một câu trả lời đầy đủ của trí nhớ; (2) Việc thực hiện chiến lược chỉ bao gồm việc viết ra. Người ta có thể mô tả bất kì phần nào của câu trả lời mà không cần xem xét các phần trước đó.

+ *Suy luận thuật toán (AR).* Suy luận được gọi là suy luận theo thuật toán nếu: (1) Việc lựa chọn chiến lược giải là sự nhắc lại một thuật toán tìm ra lời giải đã biết, ở đây không có nhu cầu sáng tạo lời giải mới; (2) Phần thực hiện chiến lược còn lại là khá dễ dàng đối với SV, tuy nhiên chỉ một lỗi sai cũng có thể khiến câu trả lời không đạt được.

2.2. Suy luận toán học của sinh viên trong quá trình giải toán về "Nguyên hàm"

2.2.1. Phương pháp nghiên cứu

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu định tính. Thực nghiệm được tiến hành khảo sát trên 8 SV năm thứ nhất và thứ hai đang học tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Các SV này đã được học đầy đủ kiến thức đạo hàm trong học kì đầu tiên ở đại học.

Chúng tôi sử dụng phương pháp giải quyết vấn đề cộng tác theo nhóm nhỏ để tổ chức cho SV làm việc. Cụ thể, SV được phân chia thành các nhóm nhỏ (mỗi nhóm từ 2-3 SV), cùng thảo luận, tranh luận để giải các bài toán được đưa ra trong một phiếu học tập. Công cụ nghiên cứu là một phiếu học tập gồm 4 bài toán. Do khuôn khổ của bài báo, chúng tôi chỉ trình bày hai bài toán điển hình trong 4 bài toán đã đưa ra trong phiếu học tập.

2.2.2. Kết quả nghiên cứu thực nghiệm

Từ khung lí thuyết về suy luận sáng tạo của Lithner (2008), chúng tôi phân tích quá trình SLTH của SV trong quá trình giải quyết vấn đề thông qua phân tích diễn ngôn và sự phát triển diễn ngôn của SV. Cụ thể, chúng tôi tập trung phân tích dữ liệu thực nghiệm theo các khía cạnh của đặc điểm lí luận trong quá trình giao tiếp để giải quyết vấn đề về mối quan hệ giữa đồ thị hàm số và đồ thị nguyên hàm.

2.2.2.1. Đặc trưng suy luận toán học của sinh viên khi giải bài toán 1

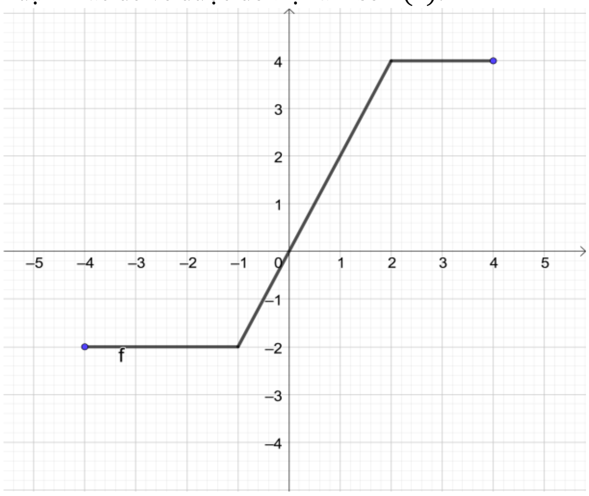
Nhóm 1 thực nghiệm gồm 2 SV được mã hóa SV A, SV B. Chúng tôi phân tích SLTH của nhóm SV này qua bài toán 1 sau đây trong phiếu học tập:

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-4; 4]$ và có đồ thị như hình 1. Hãy vẽ đồ thị của hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết rằng $F(0) = 2$. Giải thích cách suy luận để vẽ được đồ thị của hàm số $F(x)$.

1) Cách suy luận để vẽ được mà không cần tìm biểu thức $\mathrm{F}(\mathrm{x})$.

2) Vẽ đồ thị $\mathrm{F}(\mathrm{x})$.

3) Trình bày một cách suy luận khác để vẽ được đồ thị hàm số $\mathrm{F}(\mathrm{x})$.



Hình 1

Khó khăn ban đầu của SV là các em không nhớ công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Delta F$ để áp dụng vào bài toán. Khó khăn tiếp theo là chưa biết chọn khoảng nào trước để áp dụng vào công thức này. Cụ thể:

Đoạn trích 1 (thảo luận ý 1, 2):

SV A: Theo mình nên sử dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Delta F$, nghĩa là $\int_0^1 f(x)dx$ là diện tích tam giác có chiều cao bằng 2, hai cạnh góc vuông có độ dài lần lượt là 2 và 1. Với: $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$, theo bài ra $F(0) = 2$ nên ta suy ra $F(1) = 3$. Tương tự trên đoạn $[1; 2]$, ta tính được $F(2) = 6$.

SV B: Tích phân trên đoạn $[-1; 0]$ mang dấu âm đúng không?

SV A: Đúng rồi.

SV B: Trên đồ thị của hàm $f(x)$, các điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$ đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Vậy, tọa độ của nguyên hàm $F(x)$ tại hai điểm đó có đối xứng qua gốc tọa độ hay không?

SV A: Chúng ta cần tính nguyên hàm $F(x)$. Ta có: $\int_{-1}^0 f(x)dx = F(0) - F(-1)$, suy ra $F(-1) = 3$. Vậy, các điểm đó đối xứng với nhau qua trục Oy.

SV B: Cần tìm tọa độ của hàm $F(x)$ tại các điểm có hoành độ $-4;\ -1; 1; 4$ để có thể vẽ được đồ thị.

SV A: Như vậy, chúng ta đã tính được $F(1) = 3, F(2) = 6$, tiếp theo cần tính $F(3), F(4)$.

SV B: Không cần tính $F(3)$, chỉ cần tính $F(4)$.

SV A: Tương tự cách tính trên, ta tính được $F(4) = 14, F(-4) = 9$.

Giảng viên (GgV): Cần đưa ra cách lập luận để vẽ đồ thị hàm $F(x)$?

SV B: Sau khi tìm được các điểm đặc biệt $(-4; 9), (-1; 3), (0; 2), (4; 14)$, ta cần tìm thêm các khoảng đơn điệu nữa. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$ vì đồ thị nằm trên trục Ox và nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

SV A: Cần khảo sát tính chất của hàm số $F(x)$ trên $[-4; 1), [-1; 2), [2; 4]$, không cần xét các khoảng nhỏ hơn.

SV B: Đúng vậy.

SV A: Như vậy, đồ thị hàm số $F(x)$ trên $[-4; 1)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(-4; 9), (2; 5)$. Trên $[-1; 2)$, đồ thị hàm số $F(x)$ là một parabol đi qua 3 điểm $(-1; 3), (0; 2), (2; 6)$. Trên đoạn $[2; 4]$, đồ thị hàm số $F(x)$ là một đường thẳng đi qua 2 điểm $(2; 6), (4; 4)$.

Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm $F(x)$.

Sau quá trình tìm hiểu của nhóm 2 SV, khi được gợi ý của người hướng dẫn, lập luận của nhóm SV đã đáp ứng các điều kiện sau:

(1) Tính mới: Ban đầu, khi đánh giá cách vẽ đồ thị hàm $F(x)$, SV chỉ tìm các điểm đặc biệt bằng cách sử dụng công thức: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Delta F$.

(2) Tính linh hoạt: Cách tiếp cận và thích ứng khác nhau với tình hình. SV vẽ đồ thị mà không cần tìm biểu thức của hàm số $F(x)$.

(3) Tính hợp lí: Các bước lí luận của SV đều dẫn đến việc vẽ được đồ thị hàm số $F(x)$.

(4) Nền tảng toán học: Lí luận được xây dựng dựa trên các tính chất toán học, cụ thể là tính chất của tích phân xác định.

Vậy, suy luận sáng tạo toán học đã được SV áp dụng vào quá trình giải bài toán 1: Nhóm SV đã xem xét sử dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Delta F$ trong một số trường hợp để tìm ra nguyên hàm $F(x)$. Bằng cách này, nhóm SV tìm được các giá trị đặc biệt $F(1) = 3, F(2) = 6$, $F(4) = 14, F(-4) = 9$. Từ đó, SV phác thảo được đồ thị hàm số $F(x)$ đi qua các điểm đặc biệt mà không cần tìm hàm $F(x)$ cụ thể.

Đoạn trích 2 (thảo luận ý 3):

SV B: Cần tìm tọa độ của hàm $F(x)$ tại các điểm có hoành độ $-4;\ -1; 1; 4$ để có thể vẽ được đồ thị.

SV A: Như vậy, chúng ta đã tính được $F(1) = 3, F(2) = 6$, tiếp theo cần tính $F(3), F(4)$.

SV B: Không cần tính $F(3)$, chỉ cần tính $F(4)$.

SV A: Tương tự cách tính trên, ta tính được $F(4) = 14, F(-4) = 9$.

GgV: Cần đưa ra cách lập luận để vẽ đồ thị của hàm số $F(x)$?

SV B: Sau khi tìm được các điểm đặc biệt $(-4; 9), (-1; 3), (0; 2), (4; 14)$, ta cần tìm thêm các khoảng đơn điệu nữa. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$ vì đồ thị nằm trên trục Ox và nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

SV A: Cần khảo sát tính chất của hàm số $F(x)$ trên $[-4; 1), [-1; 2), [2; 4]$, không cần xét các khoảng nhỏ hơn.

SV B: Đúng vậy.

SV A: Như vậy, đồ thị hàm số $\mathrm{F(x)}$ trên $[-4; 1)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(-4; 9), (2; 5)$. Trên $[-1; 2)$, đồ thị hàm số $\mathrm{F(x)}$ là một parabol đi qua 3 điểm $(-1; 3), (0; 2), (2; 6)$. Trên đoạn $[2; 4]$, đồ thị hàm số $\mathrm{F(x)}$ là một đường thẳng đi qua 2 điểm $(2; 6), (4; 4)$.

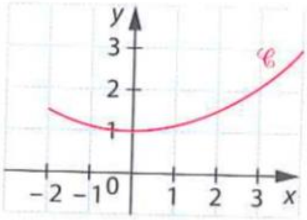
Từ đó, nhóm SV vẽ được đồ thị hàm $\mathrm{F(x)}$.

Đặc điểm chung của việc triển khai giải các bài toán theo cách 2 của SV là: (1) Việc triển khai giải toán được thực hiện theo từng bước; (2) Khi tiến độ không diễn ra như mong đợi (quá chậm hoặc kết quả trái ngược), họ nhanh chóng từ bỏ cách giải và tìm kiếm một cách khác.

2.2.2.2. Đặc trưng suy luận toán học của sinh viên khi giải bài toán 2

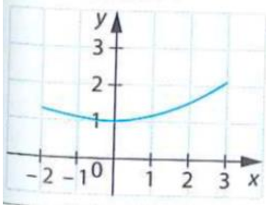
Nhóm 2 thực nghiệm gồm 2 SV, được mã hóa là SV C và SV D. Chúng tôi phân tích SLTH của nhóm SV này qua bài toán 2 dưới đây:

Bài toán 2: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục, xác định trên $[-2; +\infty)$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \geq -2$. Hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong $\mathcal{C}$ như hình 2 dưới đây:

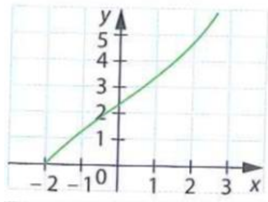


Hình 2

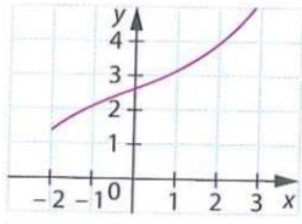
Biết rằng hàm số $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; +\infty)$, tức là $F'(x) = f(x)$. Hỏi trong 4 đường cong dưới đây, đường cong nào là đồ thị của hàm số $F(x)$. Giải thích.



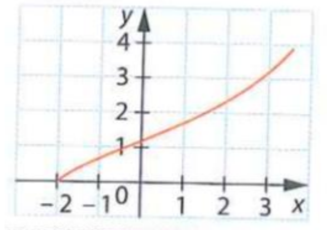
Hình 2a



Hình 2b



Hình 2c



Hình 2d

Quá trình SLTH của nhóm SV:

SV C: Ta sẽ dùng phương pháp loại trừ.

SV D: Xét đồ thị hình đầu tiên (xem hình 2a).

SV C: Theo mình, hình 2a không phải là đáp án vì $\mathrm{f(x)} > 0$ trên $[-2; +\infty)$, nên hàm số $\mathrm{F(x)}$ đồng biến, đồ thị hướng đi lên mà trong hình 2a, đồ thị có hướng xuống.

SV D: Đúng rồi, đồ thị là hình 2a có khoảng nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$, nên loại phương án 2a.

SV C: Xét đáp án là hình 2c. Trường hợp này cũng không được vì tại $\mathrm{x} = -2$, ta có $\mathrm{F(x)} = \int_{-2}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt} = 0$, nhưng đồ thị tại $\mathrm{x} = -2$ thì $\mathrm{y} \neq 0$.

SV D: Bạn xét tính đối xứng của đồ thị phải không?

SV C: Không, khi thay $\mathrm{x} = -2$, ta có $\mathrm{F(2)} = 0$.

SV D: Đúng rồi.

SV C: Chỉ còn lại 2 đáp án, hai đồ thị là mình thấy thỏa mãn, không có khoảng nghịch biến và $\mathrm{F(-2)} = 0$.

SV D: Theo bạn thì đồ thị nào là đáp án đúng?

SV C: Mình nghĩ đáp án là hình 2b, vì khi thay $x = 1$ vào hàm số $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt = F(1) - F(-2)$, do $F(-2) = 0$ nên $\int_{-2}^{1} f(t)dt = F(1)$. Mặt khác, $\int_{-2}^{1} f(t)dt$ chính là diện tích hình phẳng trên hình 2d, có diện tích lớn hơn 3 ô. Hình 2b có $F(1) > 3$, còn hình 2d có $F(1) < 3$. Vậy, ta chọn phương án đúng là hình 2b.

AR phân định được thể hiện trong suy luận của SV khi các em tìm đáp án đúng: Nhóm SV đã đưa ra sự lựa chọn dựa trên các đặc điểm sau: (1) Tất cả các phương án lựa chọn đều liên quan đến thuật toán quen thuộc đã học; (2) Các lập luận trong mỗi phương án đều là sự kết hợp giữa các thuật toán đã học; (3) Khi nhóm SV nghi ngờ về lời giải, các em sẽ tìm một thuật toán giải khác.

2.2.2.3. Một số đánh giá định tính

Trong hầu hết các tình huống có vấn đề ở các bài toán trên, SV đã xem xét tính hình thức của bài toán và tập trung vào việc sử dụng các thuật toán đã thành thạo. Suy luận sáng tạo toán học thường thích hợp trong các tình huống có vấn đề, nhưng kiểu suy luận này ít xảy ra trong các tình huống được SV phân tích trong phiếu thực nghiệm.

Có một số tình huống ở bài toán 1 chủ yếu dựa vào sự tương tác lẫn nhau của SV. Điều này được phân loại là AR có hướng dẫn, vì tất cả các lựa chọn chiến lược quan trọng đều do người phỏng vấn đưa ra, hoặc là kết quả của một câu hỏi, hoặc nhận xét từ người phỏng vấn. Suy luận sáng tạo toán học chỉ xuất hiện trong một vài trường hợp ở cuộc hội thoại trên (ví dụ trong bài toán 1 khi phác thảo đồ thị nguyên hàm $F(x)$, SV tìm phương trình của hàm $F(x)$). Đôi khi SV không thử suy luận sáng tạo toán học và sự hiểu biết về khái niệm của họ không đủ để thực hiện suy luận sáng tạo toán học. Sự hiểu biết khái niệm về năng lực và khả năng suy luận sáng tạo toán học có thể được kết nối với nhau, vì suy luận sáng tạo toán học đòi hỏi sự hiểu biết khái niệm cơ bản.

3. Kết luận

Nghiên cứu này đã phân tích các file ghi âm về thảo luận của các nhóm SV để giải các bài toán liên quan đến nguyên hàm. Kết quả thu được cho thấy, SLTH cho phép người học phân tích và hiểu sâu hơn bản chất của giao tiếp toán học thông qua các kiểu suy luận sáng tạo và suy luận bắt chước. Kiểu suy luận bắt chước đang chiếm ưu thế so với suy luận sáng tạo. Điều này có nghĩa là SV thường dựa vào các giải pháp đã được sử dụng trước đó để giải quyết vấn đề toán học thay vì sáng tạo ra các giải pháp mới. Tuy nhiên, để khuyến khích SV phát triển suy luận sáng tạo, GgV cần sử dụng các phương pháp dạy học phù hợp và khuyến khích các em tạo ra các giải pháp mới.

Tài liệu tham khảo

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. W. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.

Boaler, J. (2010). *The elephant in the classroom: Helping children learn and love maths*. Souvenir Press.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: from the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 72-87. https://doi.org/10.1016/j.jmath b.2013.10.001

Heymans, M., & Verschaffel, L. (2011). The Role of Imitation in Supporting the Development of Fraction Concepts. *Learning and Instruction*, *21*(2), 244-256.

Holtzblatt, K. M., & Beyer, H. (2008). Creative Reasoning: A Framework for Developing Creativity in Design. *IEEE Transactions on Software Engineering*, *34*(4), 433-450.

Lithner, J. (2007). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educ Stud Math*, *67*, 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2008). The development of argumentation and proof competencies in mathematics students: A longitudinal study. *Journal of Learning Sciences*, *17*(4), 500-538.

Lithner, J. (2010). Aspects of mathematical reasoning in Swedish upper secondary schools. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *15*(3-4), 5-25.

Pijls, M., & Dekker, P. (2011). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: effects of cooperative learning and origami paper folding. *ZDM*, *43*(2), 175-187.

Seidouvy, M. J., & Schindler, M. (2019). Assessing mathematical reasoning with multiple-choice items. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(3), 311-326.

Sidenvall, J. (2019). Mathematical reasoning through problem solving: A case study in a Swedish upper secondary school classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(3), 327-341.