

This article was downloaded by: [University of Cambridge]

On: 25 December 2014, At: 15:54

Publisher: Routledge

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/ucjs20>

Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage: étude des apprentissages des élèves sur deux ans

Tran Kiem Minh^{a b}

^a Laboratoire de Didactique André Revuz , Université Paris Diderot , Paris , France

^b Department of Mathematics, College of Education , Hue University , Hue , Vietnam

Published online: 30 Aug 2012.

To cite this article: Tran Kiem Minh (2012) Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage: étude des apprentissages des élèves sur deux ans, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12:3, 233-258, DOI: [10.1080/14926156.2012.704127](https://doi.org/10.1080/14926156.2012.704127)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2012.704127>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage: étude des apprentissages des élèves sur deux ans

Tran Kiem Minh

*Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, Paris, France,
et Department of Mathematics, College of Education, Hue University, Hue, Vietnam*

Résumé: Les environnements numériques d'apprentissage, particulièrement ceux qui offrent des capacités de représentations multiples, sont complexes dans leur fonctionnement et dans leurs rapports aux mathématiques. C'est pour cela que les chercheurs sont maintenant sensibles à la nécessité d'un cadre didactique et ergonomique rendant compte des potentialités de ces environnements. La recherche présentée ici aborde Casyopée, un environnement logiciel géométrique et algébrique dédié à l'apprentissage des fonctions au lycée. Les situations d'apprentissage proposées visent à approcher la notion de fonction via la modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques. Les résultats ont indiqué un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur l'artefact pendant la genèse instrumentale, et ont montré comment l'utilisation régulière de l'artefact permet aux élèves d'articuler ces deux types de connaissances. Notre étude a éclairé les potentialités d'une Typologie d'activités pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Finalement, nous avons analysé comment l'usage de Casyopée peut faire émerger un co-développement des conceptions «processus» et «objet» et favoriser donc une *compréhension flexible* des fonctions.

Abstract: Digital learning environments, particularly ones that have the capacity for multiple representations, are complex in both their functioning and their relation to mathematics. For this reason, researchers are now aware of the need for an ergonomic and didactic framework that takes into account the possibilities offered by these environments. The research presented here discusses Casyopée, a geometric and algebraic software environment intended for the learning of functions at the upper secondary school level. The proposed instructional scenarios aim to introduce students to the notion of the function through the functional modelling of geometrical dependencies. Results showed that during instrumental genesis, students developed a simultaneous understanding of the artefact and of mathematical concepts about functions. Results also showed how the regular use of artefacts enabled students to articulate these two types of knowledge. Our study revealed the possibilities for a typology of activities for the teaching and learning of functions within digital learning environments. Finally, we analyzed how the use of Casyopée could prompt a co-development of “process” and “object” concepts and in so doing promote a flexible understanding of functions.

Cette recherche a été soutenue par le projet Européen ReMath (IST4-26751).

Address correspondence to Tran Kiem Minh, Department of Mathematics, College of Education, Hue University, No. 34, Le Loi Street, Hue City, Vietnam. E-mail: kiemminh@gmail.com

INTRODUCTION

Dans une approche ergonomique des usages de la technologie pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, la genèse instrumentale se définit comme le processus qui transforme un artefact en un instrument du travail mathématique. La nécessité de considérer les genèses instrumentales des élèves et des enseignants lors de l'introduction de nouveaux artefacts est maintenant largement reconnue (Drijvers, Kieran et Mariotti, 2010). Il est également reconnu que lorsqu'un artefact offre un grand nombre de fonctionnalités profondément liées aux connaissances mathématiques, la genèse instrumentale est complexe et demande du temps. C'est en particulier le cas des artefacts offrant des moyens de travailler à la fois sur des situations géométriques et algébriques, et de les articuler (Weigand et Bichler, 2010). Ces artefacts facilitent particulièrement les activités de modélisation que les programmes d'études récents du lycée, notamment en France, encouragent pour l'apprentissage des fonctions. Par ailleurs, rendre compte des potentialités de ces environnements pour l'apprentissage suppose de disposer d'un cadre épistémologique et didactique organisant la diversité des activités sur les fonctions.

L'objectif de cet article est donc d'analyser un apprentissage des fonctions sur un temps long pendant lequel les élèves utilisent le logiciel géométrique et algébrique Casyopée. Nous visons en particulier à évaluer la durée nécessaire pour que des élèves puissent considérer Casyopée réellement comme un instrument de leur activité mathématique concernant les fonctions, et intègrent les fonctionnalités offertes par cet environnement comme constitutives de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions. Nous développons plus loin dans l'article les notions relatives à l'apprentissage des fonctions et à la genèse instrumentale, avant d'aborder l'étude proprement dite.

LES FONCTIONS AU LYCÉE ET LE RÔLE DES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE COMMUNICATION POUR L'ENSEIGNEMENT

Un des buts de l'enseignement sur les fonctions au lycée est de consolider l'étude de l'algèbre et de préparer l'introduction des éléments de l'analyse. Le travail sur les fonctions constitue donc une partie importante dans le programme français du lycée. L'approche des fonctions à travers des situations issues d'un domaine d'application est préconisée depuis le programme de 2001 :

On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématique¹.

Le programme de Seconde² nouveau de 2009 et un «document ressource» spécifique précisent l'accent mis sur les fonctions, insistant particulièrement sur la nécessité de considérer les fonctions dans un domaine d'application, et recommandent l'usage des outils logiciels.

De plus, le programme propose d'étudier des problèmes relatifs aux fonctions, notamment des problèmes d'optimisation :

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement ... Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés :

géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité, etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves peuvent être utilement exploités³.

Les fonctions apparaissent ainsi comme un fil directeur pour l'algèbre et l'analyse au lycée. L'optimisation en Seconde prépare l'approche de l'analyse en Première⁴ en mettant en avant le type de problème que la dérivation permet de résoudre. Notre étude se situe au niveau de la Première et de la Terminale et intègre l'approche des fonctions préconisée par le nouveau programme, notamment la résolution de problèmes d'optimisation issue de domaines variés ainsi que la recommandation d'utiliser des TICE⁵ pour expérimenter, modéliser et aider à la résolution.

LES FONCTIONS: APPROCHES DIDACTIQUES ET USAGES D'ENVIRONNEMENTS GÉOMÉTRIQUES ET ALGÈBRIQUES

Les fonctions jouent un rôle majeur dans les mathématiques et un rôle essentiel dans les sciences expérimentales pour la modélisation mathématique des phénomènes dynamiques issus de domaines d'application. Les recherches sur la compréhension des fonctions se sont intéressées à la dialectique entre *processus* et *objet*. Sfard (1991) distingue la nature opérationnelle des fonctions en mettant l'accent sur les processus du calcul de la valeur de sortie pour une valeur d'entrée donnée, ainsi que sur leur nature structurelle comme objets constitués d'ensembles de couples. En s'appuyant sur des analyses historiques, épistémologiques et cognitives, Sfard (1992) a conclu que la fonction est un concept que les élèves acquièrent d'abord opérationnellement puis structurellement. Elle nomme «réification des processus» la transition de la conception «processus» à la conception «objet». L'auteure a également souligné que ces derniers termes devraient être compris comme différentes facettes de la même notion plutôt que comme composants séparés. Autrement dit, les aspects opérationnel et structurel sont complémentaires.

White (2009) a conçu un environnement logiciel dédié à l'introduction des fonctions dans le contexte de la cryptographie. En portant l'attention sur la distinction entre deux points de vue «processus» et «objet», l'auteur montre comment les tâches données aux élèves dans cet environnement mettent en jeu différents aspects de la notion de fonction. De plus, il indique que la résolution des problèmes donnés dans cet environnement peut aider les élèves à atteindre un «increasing fluency in interpreting, selecting among and applying procedural and structural features of function toward a task objective» (ce que nous appellerons une *compréhension flexible* des fonctions).

D'autres auteurs mettent l'accent sur l'expérience du changement et du mouvement et sur la compréhension de cette expérience comme co-variation ou relation de dépendance entre grandeurs, comme éléments fondamentaux amenant à la notion de fonction. Comin (2005) note que la notion de fonction est fondée sur l'idée de relation de dépendance et ne peut prendre du sens que par l'étude des relations fonctionnelles entre grandeurs. Dans cette perspective, des recherches portent une attention spéciale aux potentialités de représentation des TICE pour la compréhension des dépendances fonctionnelles. En ayant utilisé un dispositif de capture de mouvements et une calculatrice graphique, Arzarello et Robutti (2004) ont demandé aux élèves de décrire les différents types de mouvement sous la forme de fonctions mathématiques à l'aide de graphes et de tableaux de valeurs. Les co-variations et les dépendances entre temps et distance dans le système physique ont été ensuite modélisées en fonctions mathématiques.

Dans la perspective vygotskienne de médiation sémiotique, Falcade, Laborde et Mariotti (2007) ont choisi la géométrie dynamique comme domaine d'application afin de fournir aux élèves une expérience qualitative de co-variations et de dépendances fonctionnelles. Leur étude a montré que les outils de la géométrie dynamique (déplacement, trace, macro, etc) peuvent être utilisés pour amener les élèves à comprendre la notion de fonction.

Bloch (2003) distingue différents cadres (*settings*) pour la notion de fonction: numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique. S'intéressant aux débuts de l'analyse, elle insiste particulièrement sur l'interaction des cadres graphique et formel pour une ingénierie portant sur la validation des propriétés des fonctions. Elle souligne qu'au moment de son étude, le cadre géométrique est peu utilisé dans l'enseignement et elle estime que sa réintroduction serait «coûteuse».

Les tenants des orientations liées aux programmes scolaires (section 2) postulent que des environnements logiciels peuvent contribuer à cette réintroduction d'un cadre géométrique. C'est aussi une hypothèse que font des recherches récentes qui s'appuient sur les nouvelles potentialités de calculatrices et logiciels intégrant des représentations multiples et du calcul formel, rejoignant aussi une idée de longue date selon laquelle les environnements de calcul formel peuvent soutenir et changer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Hodgson et Muller, 1992). Par exemple, dans le cadre du projet e-CoLab (Aldon *et al.*, 2008), les auteurs ont expérimenté et testé les nouvelles potentialités ainsi que les contraintes d'une nouvelle calculatrice TI-NSpire pour les apprentissages des élèves. Cette calculatrice est innovante, intégrant un logiciel de calcul formel et un environnement de géométrie. Dans le but d'attester du progrès des élèves dans l'apprentissage des fonctions par l'usage de cette calculatrice, Weigand et Bichler (2010) proposent un modèle de compétences comprenant trois dimensions sur lesquelles un élève donné peut se situer à trois niveaux différents: compréhension des fonctions, compétences relatives à l'outil, et activation cognitive. Les compétences mises en œuvre par un élève pour une tâche donnée se trouvent donc dans une matrice croisant ces trois dimensions.

Notre approche considère les fonctions comme *modèles de dépendances* dans un domaine d'application, et plus précisément dans un cadre géométrique tel que défini par Bloch (2003) et utilisé par Falcade *et al.* (2007). La modélisation fonctionnelle permet de relier ce cadre aux autres et aux représentations des fonctions. Notre hypothèse est donc que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme modèles de ces dépendances. Ces activités s'inscrivent dans la dialectique processus-objet que nous venons de présenter. Nous situons par ailleurs ces activités dans le cadre d'usages dans un environnement numérique intégrant des représentations multiples, géométriques et algébriques, ainsi que le calcul formel. Les représentations géométriques constituent le domaine d'application rendant possible une exploration des relations entre objets et entre grandeurs, et l'environnement offre des possibilités d'accéder aux autres représentations. Nous considérons la conceptualisation de la notion de fonction et le développement de compétences relatives à l'outil dans un processus de genèse instrumentale. La genèse instrumentale que nous considérons ici concerne donc le développement conjoint d'usages et de connaissances sur l'environnement et sur les fonctions mathématiques, ce qui rejoint certaines dimensions du modèle de Weigand et Bichler (2010). Dans la suite de l'article, nous présentons Casyopée, qui est l'environnement numérique d'apprentissage considéré pour notre recherche, puis les deux cadres théoriques principalement utilisés: l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) et une typologie d'activités sur les fonctions précisant notre approche de cette notion (Lagrange et Artigue, 2009).

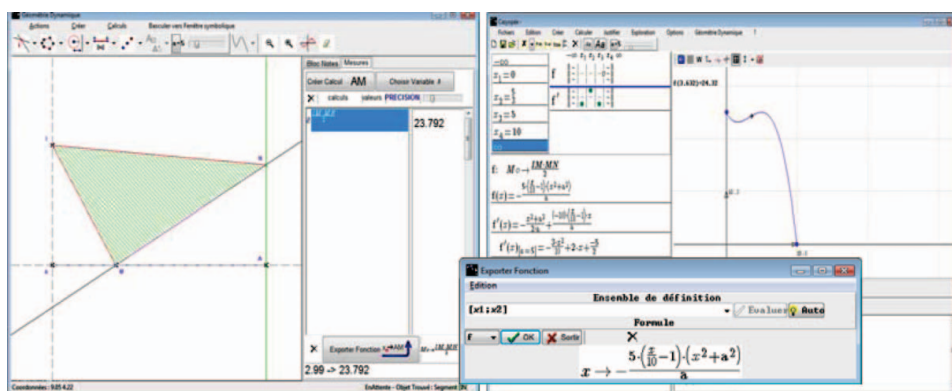


FIGURE 1 Module géométrique, module symbolique et la forme d'exportation de Casyopée. (color figure available online)

CASYOPÉE

Casyopée⁶ est un logiciel dédié à l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée (Lagrange et Gelis, 2008). L'histoire de sa conception a été exposée par Lagrange (2005). Ce logiciel a ensuite été développé dans le cadre du projet Européen ReMath⁷.

Casyopée comprend deux modules principaux qui sont liés: le symbolique et le géométrique. Le premier fournit aux élèves des outils de calculs symboliques, des capacités de représentation (graphique, symbolique, numérique ...) ainsi que des aides pour la preuve algébrique (dérivée, étude de signes, variations ...). Le module géométrique offre les caractéristiques principales d'un environnement de géométrie dynamique comme la création et l'animation des objets géométriques. Ce module facilite également la généralisation grâce à des paramètres qui peuvent être entrés dans la définition des objets géométriques.

Au niveau intermédiaire des grandeurs et mesures, la caractéristique spécifique qu'offre Casyopée est la capacité de relier les deux modules avec l'aide des calculs géométriques qui permettent de modéliser des dépendances entre grandeurs: créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, en explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et finalement exporter, dans le module symbolique, une dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique pour obtenir une fonction mathématique exprimant cette dépendance. Le but de Casyopée est donc d'aider les élèves à modéliser des relations de dépendance impliquées dans une situation géométrique donnée, de faciliter les activités sur les fonctions, et finalement de promouvoir une compréhension flexible des fonctions.

CADRES THÉORIQUES

Approche instrumentale

Drijvers, Kieran et Mariotti (2010) s'intéressent aux cadres théoriques susceptibles d'éclairer les recherches récentes dans le domaine des TICE. Ils considèrent la théorie de l'instrumentation

(Vérillon et Rabardel, 1995) comme un cadre important et fructueux. L'approche instrumentale, le corps de cette théorie, est particulièrement développée par des chercheurs français en relation avec une évolution des études en didactique des mathématiques sur les problèmes d'intégration des TICE (Bueno-Ravel et Gueudet, 2009; Guin, Ruthven et Trouche, 2005; Haspekian, 2005). Nous rappelons brièvement ses principes.

L'approche instrumentale se situe dans la perspective socio-culturelle de Lev Vygotsky (1978) sur les processus d'apprentissage. Le point de départ essentiel de cette approche est la distinction entre artefact et instrument (Rabardel, 1995). Un *artefact* est souvent, mais non nécessairement, un objet physique de l'activité humaine, conçu pour des activités spécifiques. Pour un individu donné, l'artefact n'a pas de valeur instrumentale en soi. Un *instrument* n'est pas spontanément disponible mais, à travers un processus appelé *genèse instrumentale*, le sujet se construit des schèmes d'utilisation de l'artefact pour réaliser un type de tâches. Un schème est considéré ici comme une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations données (Vergnaud, 1991). Par conséquent, un instrument se compose d'une partie de l'artefact et de composantes psychologiques.

Au cours de la genèse instrumentale, une relation bilatérale entre artefact et sujet est établie: les connaissances du sujet le guident d'une part pour mettre l'artefact «à sa main» (ce processus est appelé instrumentalisation) et, d'autre part, les potentialités et les contraintes de l'artefact influencent et conditionnent l'action et les stratégies de résolution de problèmes du sujet (ce processus est appelé instrumentation⁸). La recherche a montré que la genèse instrumentale est un processus complexe qui nécessite du temps et dépend des caractéristiques de l'artefact et de l'activité du sujet.

Les genèses instrumentales sont d'abord des processus individuels. Cependant, ces genèses ont également une dimension sociale, car les élèves développent des schèmes mentaux dans le contexte de la communauté de classe.

Dans la perspective globale de l'approche instrumentale, nous nous intéressons dans cet article aux genèses instrumentales des élèves dans l'environnement Casyopée et à la manière dont ces genèses articulent l'appropriation de l'artefact et la construction de connaissances mathématiques.

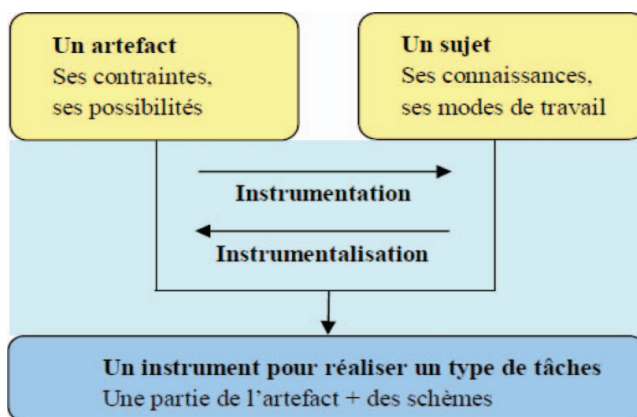


FIGURE 2 La genèse instrumentale (Trouche, 2007). (color figure available online)

Notre accent est mis notamment sur les phénomènes relatifs au processus d'instrumentation en considérant l'interaction et l'imbrication entre le développement de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'artefact chez des élèves pendant un temps long de la genèse. Dans le cas d'un artefact utilisé pour l'apprentissage des mathématiques comme Casyopée, la genèse instrumentale concerne à la fois les connaissances mathématiques sur les fonctions et les connaissances sur les fonctionnalités de l'artefact. Les recherches en didactique des mathématiques ont montré qu'une telle genèse peut être complexe, même dans le cas des tâches simples comme le cadrage de la représentation graphique d'une fonction dans la fenêtre d'une calculatrice (Artigue, 2002, p. 250; Guin et Trouche, 1999, p. 217). Ainsi nous sommes conscients de la complexité des genèses chez les élèves lors de l'introduction de Casyopée en classe. De plus, la compréhension et la manipulation des différentes représentations offertes par Casyopée nécessitent également des connaissances mathématiques variées. Cette préoccupation d'une genèse instrumentale adéquate de Casyopée nous a conduits à concevoir une introduction progressive aux élèves en prenant en compte le développement de leurs connaissances mathématiques.

Typologie d'activités

Au cours d'un travail récent, Lagrange et Artigue (2009) ont proposé une typologie ayant pour but de classer et de relier les activités variées sur les fonctions. Cette typologie d'activités comprend deux composantes principales: les niveaux de représentation des dépendances et les types d'activités sur ces dépendances.

Les auteurs ont distingué trois niveaux de représentation: la co-variation et la dépendance dans un système physique, la co-variation et la dépendance entre grandeurs ou mesures, et les fonctions mathématiques. Ces trois niveaux, concernant l'apprentissage des fonctions que nous avons présentés plus haut, sont basés sur des fondements épistémologiques et cognitifs selon lesquels le concept de fonction est lié à l'expérience sensitive des dépendances dans un système physique où nous pouvons observer des variations mutuelles des objets.

Lagrange et Artigue ont classifié en quatre catégories les types d'activités sur des dépendances: enactive-iconique, générative, transformationnelle, et global/méta. La première catégorie enactive-iconique est adaptée du travail sur différentes représentations de l'analyse de Tall (1996), tandis que les trois autres sont inspirées du modèle des activités algébriques de Kieran (2004).

Nous considérons cette typologie d'activités comme un cadre théorique pour les fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Elle soutient notre approche où les fonctions sont considérées comme modèles de dépendance dans un domaine d'application. En effet, considérer les activités au niveau intermédiaire «grandeurs et mesures» permet de mettre en évidence la modélisation fonctionnelle qui relie les activités sur les fonctions dans un domaine d'application et en algèbre comme nous l'avons dit plus haut en présentant Casyopée. Les activités à ce niveau sont donc fructueuses pour la conceptualisation des fonctions: choisir une variable appropriée pour quantifier des observations, distinguer les dépendances fonctionnelles parmi des co-variations, construire une formule pré-algébrique exprimant la dépendance fonctionnelle, etc.

Cette recherche vise donc à étudier les principales questions suivantes:

- Comment l'utilisation régulière de Casyopée sur un temps long en classe permet-elle aux élèves d'articuler le développement conjoint de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée?

TABLEAU 1
Typologie d'activités

		Types de représentations et d'activités			
		Enactive-iconique	Générative	Transformationnelle	Globale/Méta
Niveaux de représentation	Système physique	Exploration globale: déplacer des éléments et observer les transformations du système.	Percevoir les relations de dépendance entre grandeurs.		Considérer des objets «génériques».
	Grandeurs et mesures	Exploration locale: faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures.	Choisir une variable. Créer une formule pré-algébrique exprimant la dépendance.		Considérer des grandeurs «génériques». Interpréter.
	Fonctions mathématiques	Tracé local du graphe. Reconnaissance globale de la courbe. Percevoir les propriétés des graphes.	Représenter algébriquement une formule et un domaine de définition.	Développer, factoriser l'expression. Reconnaître l'équivalence. Substituer un paramètre à une valeur.	Reconnaître la structure de la fonction. Considérer des familles de fonctions. Utiliser des paramètres. Preuve.

- Quelles fonctionnalités de l'environnement permettent-elles de relier les différents types d'activités sur les fonctions aux trois niveaux de représentation des dépendances au cours de la genèse instrumentale?
- Comment les activités des élèves dans les différents registres sémiotiques⁹ de Casyopée favorisent-elles une compréhension flexible des fonctions?

MÉTHODOLOGIE

Nous avons suivi une classe durant deux années d'expérimentation. Nous nous sommes plus particulièrement concentrés sur les observations en classe d'un binôme (appelé binôme Elina-Chloé) durant les séances expérimentales. Nous avons choisi le même type de problèmes d'optimisation pour ces observations. La première expérimentation a été implémentée en classe de Première S (Première scientifique) dans le cadre du projet ReMath. Nous avons ensuite organisé une seconde expérimentation pendant l'année de Terminale S. Toutes les séances expérimentales se sont déroulées à Saint-Malo en France. Nous avons pu observer et suivre de manière précise le travail et les échanges des élèves grâce à l'enregistrement vidéo et audio et à un logiciel de capture d'écran.

Nous considérons la progression des élèves durant les deux expérimentations sous deux aspects: leur utilisation de Casyopée et leurs connaissances mathématiques. Afin d'éclairer cette progression, nous nous appuyons non seulement sur des observations en classe mais encore

sur un questionnaire de bilan et un entretien de fin d'année avec des élèves observés et avec l'enseignant. Ce questionnaire d'opinion leur a été donné à la fin de la seconde expérimentation. Il porte sur l'appropriation des fonctionnalités de Casyopée par des élèves et sur l'apport des caractéristiques spécifiques du logiciel pour l'apprentissage des fonctions, notamment pour la modélisation fonctionnelle. La séance d'entretien comprend deux parties. Dans la première partie, il est demandé aux élèves d'utiliser Casyopée pour résoudre un problème d'optimisation qui est similaire à ceux donnés dans les séances de la seconde expérimentation. La deuxième partie est réservée à un entretien court dont le contenu porte sur les étapes de la résolution de ce type de problème d'optimisation avec Casyopée.

Les données recueillies comprennent des notes d'observation, des fichiers vidéo de captures d'écran, des fichiers audio, des productions écrites des élèves et des comptes rendus de l'enseignant. Après les expérimentations, des analyses a posteriori sont confrontées avec une analyse a priori des situations données afin d'en déduire des conclusions. L'analyse de toutes ces données nous permet d'identifier les genèses instrumentales des élèves, leur utilisation de Casyopée et leur compréhension sur les fonctions.

EXPÉRIMENTATIONS

Comme partie du projet ReMath, notre première expérimentation s'est déroulée au premier trimestre de l'année scolaire 2007–2008. Les séances ont eu lieu en salle informatique. Les élèves travaillent en binôme pour réaliser des tâches données dans la fiche d'élève. La deuxième expérimentation est une ingénierie conçue et réalisée pendant l'année scolaire 2008–2009. Nous avons suivi une des classes en Terminale S qui est composée des mêmes élèves observés pendant l'année de Première S. Les entretiens avec le binôme Elina-Chloé et l'enseignant ont été réalisées à la fin de l'année après l'épreuve pratique du baccalauréat.

Présentation des deux problèmes

Durant les deux années d'expérimentation, les élèves ont eu l'occasion de travailler sur un même type de problèmes d'optimisation de calcul d'aires. Afin d'avoir une idée générale sur ce type de problème, nous présentons brièvement ci-dessous les deux problèmes proposés aux élèves: l'un à la fin de la première expérimentation et l'autre pendant notre deuxième expérimentation.

Dans chacun des deux problèmes, la figure est définie à l'aide de paramètres. Leur résolution nécessite donc une prise en compte de ces paramètres. Cette demande est appropriée et importante car au niveau de la classe de Première les élèves doivent s'attaquer à des problèmes plus généraux, au-delà des cas particuliers. De plus, ces élèves s'étaient familiarisés avec la notion de paramètre ainsi que les fonctionnalités correspondantes de Casyopée pendant les premières séances expérimentales en Première S.

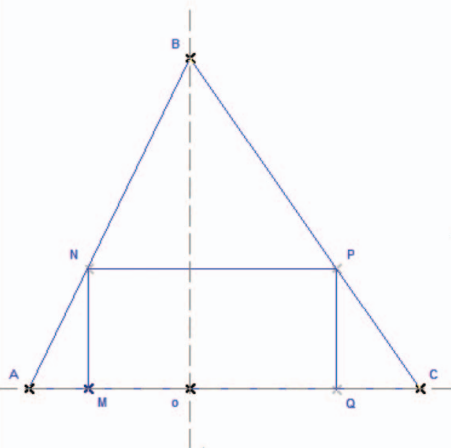
Analyse a priori

Tâches Mathématiques

Le processus de résolution de ce type de problèmes se divise en plusieurs étapes consécutives. Le tableau suivant indique pour chaque étape les composants mathématiques, les composantes relatifs à l'artefact et les fonctionnalités correspondantes offertes par Casyopée:

Le problème 1 (posé en Première S) :

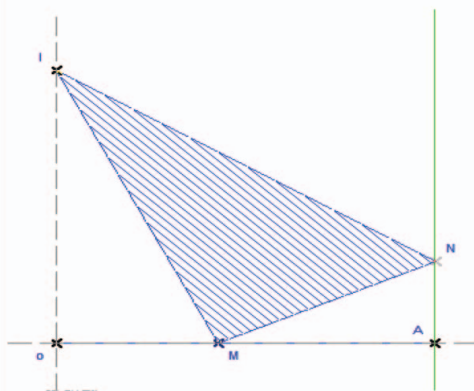
Soit a , b et c trois paramètres positifs. Dans un repère orthonormé oxy on considère les points $A(-a;0)$, $B(0;b)$ et $C(c;0)$. On construit le rectangle $MNPQ$ avec M sur $[OA]$, N sur $[AB]$, P sur $[BC]$ et Q sur $[OC]$.



Existe-il une position du point M telle que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale ?

Le problème 2 (posé en Terminale S) :

Soit a un paramètre positif. Dans un repère orthonormé oxy on construit deux points $A(10;0)$, $I(0;a)$ et la parallèle à l'axe oy passant par A . M est un point libre sur le segment $[OA]$. On crée le triangle IMN rectangle en M , avec N appartenant à la parallèle (le triangle étant « aplati » selon le segment $[IA]$ quand M est en A).



Existe-il une position du point M telle que l'aire du triangle IMN soit maximale ?

FIGURE 3 Type de problèmes d'optimisation. (color figure available online)

Les deux problèmes donnés, l'un en Première et l'autre en Terminale, ont un thème commun. En revanche, il y a une évolution de la complexité des tâches mathématiques données aux élèves pour la deuxième expérimentation en Terminale. Voici le détail de cette évolution:

- Explorer et faire des conjectures: les variations des valeurs de l'aire sont plus complexes. De plus, il peut y avoir deux positions du point M pour lesquelles l'aire est maximale.
- Modéliser le problème: la fonction exportée dans la fenêtre algébrique est un polynôme de troisième degré tandis que pour le premier problème, la fonction est un trinôme du second degré.
- Faire une preuve algébrique: la preuve algébrique nécessite l'usage de la dérivée et les recherches associées.

TABLEAU 2
Composants mathématiques, composants relatifs à l'artefact et fonctionnalités correspondantes de Casyopée

Composants mathématiques	Composants relatifs à l'artefact	Aides et rétroactions fournies par Casyopée
• Concevoir la figure • Explorer et faire des conjectures • Modéliser le problème	• Créer des objets géométriques, définir et piloter des paramètres • Bouger les objets géométriques libres • Choisir une variable adéquate; exporter une fonction dans le module symbolique	• Outils de géométrie dynamique; «robustesse» de la construction^a. • Créer un «calcul géométrique»; affichage dynamique des valeurs numériques du calcul. • Fonctionnalités: «Choisir une variable» et «Exporter une fonction»; rétroactions sur le choix de variable; calcul automatique de l'expression algébrique et du domaine de définition de la fonction exportée.
• Faire une preuve algébrique	• Faire des transformations algébriques; calculer la dérivée et trouver ses signes	• Fonctionnalités de calcul formel; aider à trouver des signes; visualiser le tracé graphique; liens entre la représentation graphique et la géométrie dynamique.
• Considérer la généralisation • Retourner dans le cadre géométrique	• Travailler sur des paramètres • Visualiser la réponse dans la fenêtre géométrique	• Pilotage des paramètres. • Capacité de relier les deux modules; liens entre la géométrie dynamique et la représentation graphique.

^aUne construction géométrique est dite «robuste» si la figure est conservée par déplacement.

- Considérer la généralisation: dans le second problème, la généralisation amène à une étude de cas selon les valeurs du paramètre. Pour le premier problème, la prise en compte des paramètres aide à la généralisation d'une propriété.

Étapes cruciales

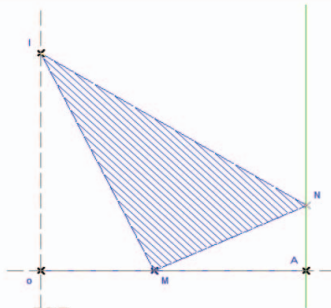
La résolution de ces deux problèmes se divise en étapes similaires. Dans les parties suivantes, nous limitons donc notre analyse au deuxième problème. Nous portons notre attention sur l'analyse des épisodes et moments cruciaux tout au long du processus de résolution du problème.

Fiche élève. Le texte du deuxième problème donné aux élèves (Figure 4) distingue deux phases principales. Dans la première phase, il est demandé aux élèves de travailler sur le cas $a = 5$. Dans ce cas, la fonction exprimant l'aire du triangle IMN a un minimum et un maximum sur l'intervalle ouvert $[0;10]$. La valeur de la fonction à l'origine o est égale à la valeur au point maximum. Il y a donc deux positions possibles du point libre M pour lesquelles l'aire est maximale: le point o et le point correspondant au maximum sur $[0;10]$.

Pour la deuxième phase, les élèves explorent le problème avec le cas $a = 6$ où la fonction exprimant l'aire du triangle IMN est également un polynôme de troisième degré mais strictement décroissant sur son intervalle de définition. Il n'y a donc qu'une position possible pour le point M , l'extrémité o du segment $[oA]$.

Problème 2 :

Soit a un paramètre positif. Dans un repère orthonormé oxy on construit deux points $A(10;0)$, $I(0;a)$ et la parallèle à l'axe oy passant par A . M est un point libre sur le segment $[OA]$. On crée le triangle IMN rectangle en M , avec N appartenant à la parallèle. Existe-il une position du point M telle que l'aire du triangle IMN soit maximale ?

**1. Phase 1 :** Le cas $a = 5$

Concevoir la figure avec Casyopée

Créer un calcul géométrique de l'aire du triangle IMN et explorer le problème en déplaçant le point libre M

Modélisation fonctionnelle : indiquer le choix de variable et l'expression algébrique de la fonction exportée

Chercher une preuve algébrique

Visualiser la réponse dans la fenêtre géométrique.

2. Phase 2 : Le cas $a = 6$

Réexplorer le problème.

FIGURE 4 Texte donné aux élèves en Terminale S. (color figure available online)

Modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques. La construction de la figure dynamique est effectuée dans la fenêtre géométrique de Casyopée. Ensuite, les élèves peuvent créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle, par exemple $\frac{1}{2} IM \times MN$ afin d'explorer la variation de ses valeurs numériques. La tâche «explorer» du problème a pour but d'encourager des observations des co-variations entre grandeurs et des explorations qualitatives de la variation de l'aire. Par exemple, les élèves peuvent observer la co-variation entre le point libre M et la valeur de l'aire. Ils peuvent également observer la co-variation entre une mesure concernant le point libre M et l'aire. Pour le cas $a = 5$, lorsqu'ils déplacent le point M de l'origine o au point A , cette valeur diminue puis augmente jusqu'à la valeur maximale de 25 quand M est le milieu du segment $[oA]$. Finalement, elle diminue dans le reste. Comme nous l'avons noté plus haut, l'aire admet également une valeur maximale de 25 lorsque M coïncide avec l'origine o .

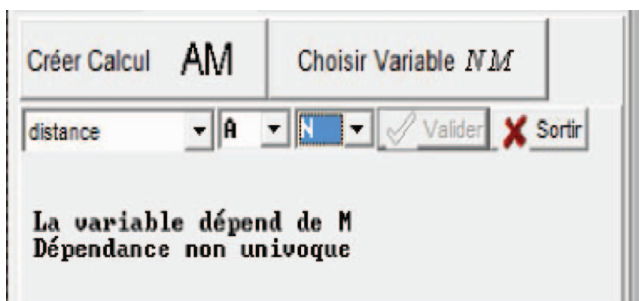


FIGURE 5 Choix inadéquat et rétroaction de Casyopée. (color figure available online)

La modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques dans Casyopée est caractérisée par les actions de choisir une grandeur comme variable et puis d'exporter la dépendance fonctionnelle obtenue. Le passage d'une co-variation à une dépendance fonctionnelle est une phase importante et très attendue chez les élèves, malgré le fait que cela ne soit pas facile pour certains d'entre eux. Il est possible qu'une aide de l'enseignant soit nécessaire pour ce passage. Les élèves peuvent choisir une variable adéquate parmi plusieurs choix possibles: la distance OM , l'abscisse du point M , la distance AM , etc. Casyopée fournira un feedback sur la validité de chaque choix de variable. Notons bien qu'un choix inadéquat de variable implique des conséquences sur la complexité de l'expression algébrique de la fonction exportée. Par exemple, si on choisit la distance MN comme variable, cette variable est acceptée par Casyopée mais l'expression de la fonction exportée sera volumineuse. Par contre, si l'élève prend la variable AN , Casyopée fournira un feedback indiquant que la dépendance est non univoque (non fonctionnelle) et on ne peut pas la valider:

Ensuite, les élèves peuvent exporter la dépendance fonctionnelle dans le module symbolique pour obtenir son expression algébrique. Casyopée fournira une feedback indiquant l'intervalle de définition et l'expression de la fonction. Par exemple, avec le choix de la variable $x = OM$, la fonction exprimant l'aire du triangle IMN sera:

Cette exportation correspond à un changement du cadre géométrique vers le cadre algébrique.

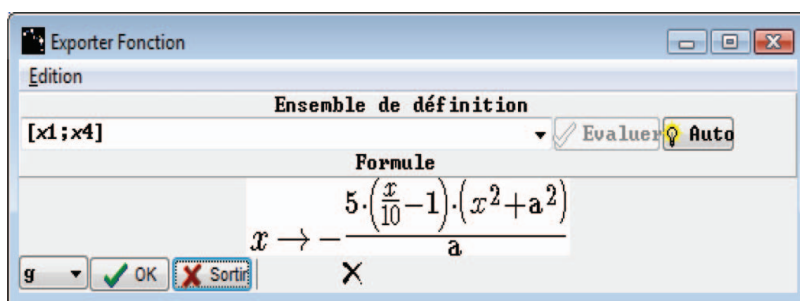


FIGURE 6 Exportation de la fonction. (color figure available online)

Dans le cadre algébrique, les élèves peuvent mobiliser différentes techniques et registres sémiotiques pour trouver une preuve algébrique. Ils peuvent utiliser le registre graphique pour compléter l'exploration des variations de l'aire et le maximum de la fonction. Ils peuvent également passer du registre graphique au registre symbolique pour réaliser des transformations algébriques. Casyopée permet de développer ou de factoriser l'expression algébrique pour obtenir une expression algébrique plus simple. Casyopée permet aussi aux élèves de calculer la dérivée de la fonction et ses signes pour arriver à une preuve algébrique. Finalement, la visualisation de la réponse dans la fenêtre géométrique permet de valider la réponse du problème. Pour le cas $a = 6$, les élèves doivent piloter le paramètre a vers la valeur $a = 6$ puis continuer à explorer une autre fois le nouveau problème. Notre intention didactique est de dégager le rôle que joue le paramètre a relativement aux variations de l'aire du triangle et à la position du point M qui maximise ladite aire.

Niveaux de représentation et types d'activités sur les fonctions. Nous analysons maintenant les apports de Casyopée pour relier les différents niveaux de représentation et types d'activités sur les fonctions.

D'abord, le module de géométrie dynamique est considéré comme un système physique pour des activités enactives-iconiques. À ce premier niveau, les élèves peuvent faire une exploration visuelle des aires du triangle IMN .

L'action de créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle (une formule pré-algébrique, par exemple $\frac{1}{2}IM \times MN$) est un type d'activité générative et correspond au passage du niveau «système physique» au niveau intermédiaire «grandeurs et mesures» (Tableau 1). Cela nécessite de connaître la formule du calcul d'aire d'un triangle et d'avoir en tête que l'angle en M est un angle droit.

Au niveau «grandeurs et mesures», cette formule pré-algébrique sert à des explorations locales de type enactive-iconique telles que: faire varier des grandeurs concernant le point M , observer les variations de l'aire et conjecturer une valeur maximale.

L'activité générative à ce niveau correspond à une modélisation fonctionnelle des relations de dépendance. Le passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative est donc caractérisé par l'action de choisir une variable. Après cette action, Casyopée peut afficher la dépendance fonctionnelle sous la forme d'une fonction géométrique, comme par exemple $oM \rightarrow \frac{1}{2}IM \times MN$.

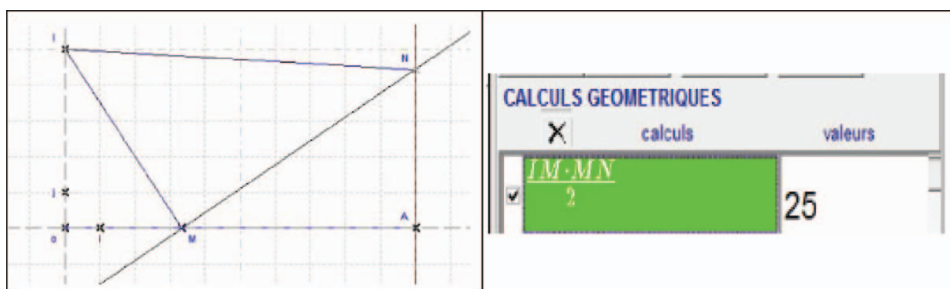


FIGURE 7 Passage du niveau «système physique» au niveau «grandeurs et mesures» pour les deux types d'activités enactive-iconique et générative. (color figure available online)

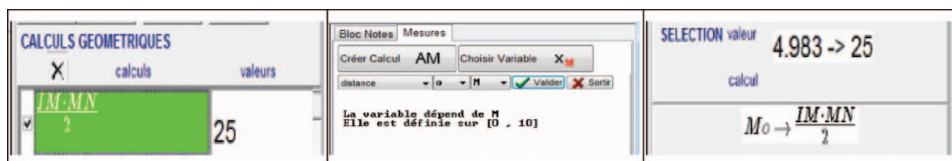


FIGURE 8 Passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative pour le niveau «grandeurs et mesures». (color figure available online)

L'exportation de la fonction géométrique dans le module symbolique correspond à un passage du niveau «grandeurs et mesures» au niveau «fonctions mathématiques». L'identification de la variable, de son domaine de définition et la validation de sa formule sont des étapes importantes. Casyopée donne une aide pour ces étapes en calculant le domaine et la formule, tout en laissant l'élève libre du choix de variable.

Au niveau «fonctions mathématiques», le type d'activité type enactive-iconique concerne des explorations locales et globales du tracé graphique de la fonction. À ce niveau, Casyopée permet facilement des passages entre deux types d'activité générative et enactive-iconique car la fenêtre graphique est intégrée dans le module symbolique.

Dans un même type d'activité enactive-iconique, Casyopée peut permettre de relier le niveau «fonctions mathématiques» au niveau «système physique» grâce à sa caractéristique spécifique: le déplacement d'un point mobile sur le tracé graphique implique un mouvement correspondant du point libre M dans la figure dynamique et réciproquement.

Conceptions «processus» et «objet» dans chacun des cadres. Dans le cadre géométrique, les activités avec Casyopée peuvent aider à développer la conception «processus» et à favoriser un passage à la conception «objet» sur les fonctions. Les fonctions sont considérées ici comme des processus dynamiques ou des co-variations entre grandeurs ou mesures. Par exemple, les élèves peuvent explorer le processus de co-variation entre la valeur du segment $[oM]$ et celle du calcul d'aire $\frac{1}{2}IM \times MN$ en faisant bouger le point mobile M . Lorsque les élèves choisissent une variable, par exemple la distance oM , Casyopée donne une représentation symbolique de la dépendance fonctionnelle exprimée par la formule pré-algébrique $oM \rightarrow \frac{1}{2}IM \times MN$. Le choix d'une variable apparaît donc clairement dans cet exemple comme nécessaire et accompagnant le passage d'une conception «processus» à une conception «objet» où la fonction est exprimée par une formule symbolique.

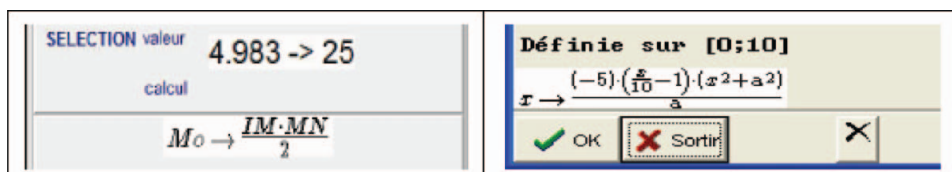


FIGURE 9 Passage du niveau «grandeurs et mesures» au niveau «fonctions mathématiques» pour le type d'activité générative. (color figure available online)

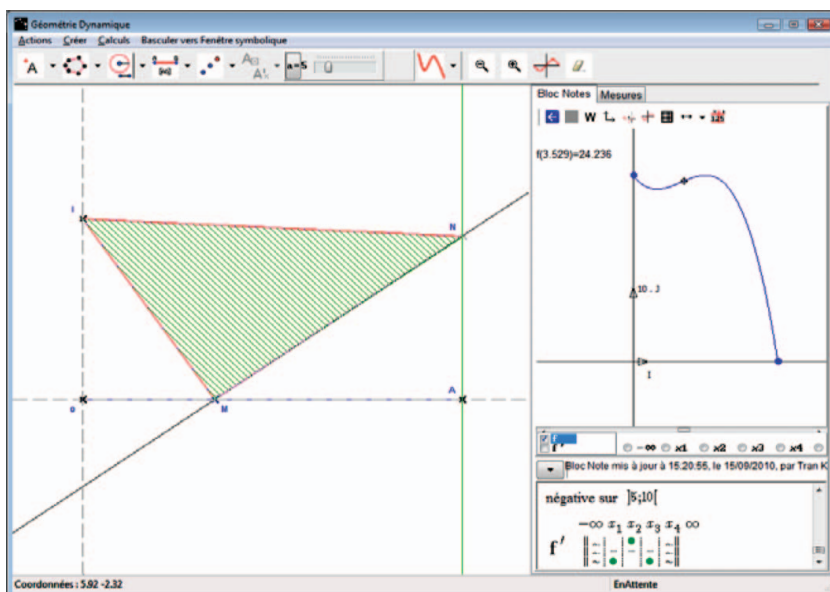


FIGURE 10 Passage du niveau «fonctions mathématiques» au niveau «système physique» pour le type d'activité enactive-iconique. (color figure available online)

L'exportation de la fonction dans le module symbolique de Casyopée correspond à un changement du cadre géométrique au cadre algébrique. Dans ce cadre, une fonction peut être représentée dans trois différents registres: symbolique, graphique et numérique. Le registre symbolique de Casyopée encourage plutôt la conception «objet» des fonctions, tout en conservant des écritures qui gardent la trace d'une conception «processus». Les élèves peuvent travailler sur l'expression algébrique de la fonction en la factorisant, développant ou calculant sa dérivée. Dans le registre graphique, les activités avec Casyopée peuvent encourager à la fois les deux conceptions «processus» et «objet». Une conception «processus» est liée à la considération de la correspondance numérique entre abscisse et ordonnée d'un point mobile sur le graphe. Une conception «objet» considère des propriétés globales du graphe de la fonction.

Avec la possibilité de relier les deux modules géométrique et algébrique, nous pensons que les activités avec Casyopée peuvent aider à développer ces deux conceptions sur les fonctions et favoriser les passages entre elles.

SYNTHÈSE DES OBSERVATIONS

Nous comparons maintenant les résultats d'observation des élèves pendant deux années d'expérimentation. Nous portons notre attention sur deux aspects: leur utilisation de Casyopée et leurs connaissances mathématiques sur les fonctions.

Synergie de connaissances mathématiques et connaissances sur l'artefact: une caractéristique de la genèse instrumentale

Réalisation des tâches

Le cas du binôme Elina-Chloé. Pour chacune des tâches données dans le Tableau 2, nous avons établi un rapport détaillé des actions réalisées par ce binôme durant les deux années d'expérimentation. Nous comparons maintenant des éléments significatifs issus des deux expérimentations. Nous choisissons de découper le déroulement en épisodes correspondants aux tâches.

- Conception de la figure:

Les observations ont montré que cette tâche est difficile et demande de mobiliser les connaissances mathématiques concernées. Les difficultés que le binôme a rencontrées concernent principalement la distinction entre point libre, point semi-libre et point restreint.

Durant la première expérimentation, le binôme avait passé beaucoup de temps à construire la figure. Il avait fait d'abord la construction du quadrilatère $MNPQ$ «mou » en prenant en compte des propriétés de parallélisme et perpendicularité des côtés d'un rectangle seulement «au jugé». La déformation de la figure lors du déplacement du point libre M l'aide à reconnaître cette erreur. Cependant, il a montré des adaptations insuffisantes à cette rétroaction et l'observateur a dû intervenir pour l'aider. Dans la deuxième expérimentation, ces difficultés restent encore mais le binôme a pu les corriger et les dépasser sans l'aide de l'observateur.

- Explorations et conjectures:

Nous avons repéré une difficulté d'ordre instrumental de ces élèves lors de la première expérimentation. Il s'agit de la confusion entre deux actions: «créer un calcul» et «choisir une variable» qui correspondent à deux icônes adjacentes dans onglet «Mesures» de Casyopée. D'autre part, le binôme a fait une erreur en tapant le calcul géométrique de l'aire $MN \times MP$ au lieu de $MN \times MQ$. Il a fait ensuite varier le point M et a observé des valeurs numériques croissantes alors que visiblement l'aire diminuait sur la figure. Cette rétroaction l'a aidé à repérer l'erreur et à la corriger. Quant à la recherche des conjectures, le binôme l'a faite sur la position du point N et non sur celle de M qui est le point libre. Il n'est pas intéressé aux variations de l'aire du rectangle $MNPQ$ mais uniquement à la valeur du maximum.

Durant la deuxième expérimentation, ce binôme a beaucoup exploré des propriétés de l'aire, tant locales que globales. Il a fait des conjectures sur la position exacte du point libre M ainsi que sur le sens de variation de la valeur de l'aire. Nous pensons que ces explorations locales et globales sont significatives pour les élèves avant de passer au niveau de la fonction mathématique. Nous avons également trouvé dans leurs échanges oraux des signifiés liés à l'idée de co-variation comme «croissante», «décroissante», etc.

- Modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques:

L'action de modéliser une dépendance géométrique est principalement gérée par deux boutons «Choisir une variable», «Exporter une fonction» et aussi par des rétroactions associées dans Casyopée. L'observation a montré que ces deux élèves avaient du mal à réaliser ces actions pendant la première expérimentation. D'abord, le passage au choix

d'une variable n'était pas spontané et ils ont eu besoin d'aide de l'observateur. Enfin, ils ont choisi des variables peu appropriées comme la distance NP , puis MQ . L'action d'exporter une fonction a nécessité aussi l'intervention de l'observateur. Cependant, par un dialogue avec le logiciel via les rétroactions, ils ont finalement choisi une variable adéquate x_M .

En revanche, l'observation dans la deuxième expérimentation a montré leur évolution marquante dans ces deux actions de modélisation (choix de la variable et exportation de la fonction). Les deux élèves ont rapidement et spontanément réalisé les actions sans avoir besoin des interventions de l'observateur. L'extrait suivant montre cette évolution:

Chloé: Choix d'une variable? La dernière fois, on l'a fait avec la hauteur.

Elina: Non, oM . Je pense que ça c'est bon pour une variable.

Chloé: Oui. (*Elle valide cette variable puis exporte la fonction*)

Elina: Son ensemble de définition?

Chloé: C'est $[-\infty; +\infty]$. Ah non, c'est $[0;10]$.

Elina: Regarde! C'est marqué, l'ensemble de définition.

Cependant, leur acquisition d'un processus de modélisation fonctionnelle plus général est en cours. L'extrait suivant de notre entretien à la fin des deux expérimentations avec ces deux élèves montre bien leur décontextualisation partielle du problème d'optimisation particulier.

Chercheur: Et finalement, quelles sont les étapes de la modélisation?

Chloé: On trace la figure, on fait des conjectures.

Elina: On fait le calcul.

Chloé: Oui, on trace la figure, on fait le calcul.

Chloé: Et après le calcul, il faut juste que l'on regarde ce qui se passe, et on conjecture.

Elina: Ensuite, on choisit la variable.

Chloé: Oui, on exporte la fonction et essaie de valider la conjecture.

Ainsi, l'évolution des élèves a montré la potentialité *a-didactique* de la tâche proposée et l'effet positif des rétroactions du logiciel.

- Preuve algébrique:

La première expérimentation a témoigné d'une réussite faible du binôme pour cette tâche. En fait, après avoir reconnu la parabole dans la fenêtre graphique, il ne savait pas comment exploiter et mobiliser ses connaissances. Il avait besoin d'interventions de l'observateur pour se souvenir de la formule $-\frac{b}{2a}$ des coordonnées du maximum et l'utiliser. Finalement, il n'a obtenu la réponse qu'en considérant une valeur particulière pour les paramètres.

Dans la deuxième expérimentation, ce binôme a proposé une démarche correcte pour la preuve en utilisant la dérivée. Il était à l'aise avec des fonctionnalités de Casyopée comme «Développer», «Factoriser» et a utilisé les nouvelles fonctionnalités comme «Dérivée»,

«Justifier/Signes» (les nouvelles fonctionnalités utilisées dans cette expérimentation) pour trouver la dérivée et son signe. Le binôme a utilisé le menu de «Calculer/Zéros» pour calculer les zéros de la dérivée. Il a obtenu deux racines dépendant du paramètre a . Il a substitué la valeur numérique 5 au paramètre a puis a construit un tableau de variation pour cette valeur du paramètre.

- Retour dans la fenêtre géométrique:
Finalement, le binôme est retourné dans la fenêtre géométrique de Casyopée et a vérifié les positions trouvées du point libre M correspondant à l'aire maximale. Pour la deuxième phase, il a piloté le paramètre vers la valeur $a = 6$, a conjecturé et prouvé le problème.

Autres élèves. Durant la première expérimentation, tous les élèves observés avaient eu du mal à construire la figure dynamique et ont pris beaucoup de temps pour achever cette tâche. La plupart d'entre eux ont d'abord construit un rectangle $MNPQ$ «mou» avec des points M, N, P, Q libres dans le plan. Ils s'aperçoivent de cette erreur en faisant bouger les points. Certains élèves ont eu besoin d'aide de l'enseignant ou de l'observateur pour finir la construction de la figure. La création d'un calcul géométrique de l'aire ne leur pose en général pas de problème. Pourtant, les élèves n'ont pas fait beaucoup d'explorations numériques et de conjectures sur les variations de l'aire. Les choix de variables sont variés mais l'exportation d'une fonction a très souvent nécessité l'intervention de l'enseignant. Pour la preuve algébrique, les élèves ont principalement travaillé avec papier/crayon sur un cas particulier des paramètres et ont peu utilisé les outils algébriques disponibles dans Casyopée pour le calcul de la valeur maximale.

Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix d'une variable adéquate: $x = \dots OM \dots$

3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle IMN affichée dans la fenêtre « Mesures »:

La fonction géométrique: $f: \dots \rightarrow \dots \frac{IM \times IN}{2} \dots$

Son ensemble de définition: $[0, 10]$

Son expression algébrique: $f(x) = \dots \frac{(-5) \times (\frac{x}{10} - 1) \times (x^2 + a^2)}{2} \dots$

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (Quelle démarche vous allez faire?)

Calcul de $f(x)$ || $f'(x) = \frac{-5x^2 + 2x - 5}{10}$

Etude du signe de $f'(x)$ || $\hat{=}$ ann. en ?

$\Delta_{max} = \max_{x \in [0, 10]} f(x)$ || $\left(\frac{100 - 30 \pm 10}{2}, -\sqrt{100 - 30 \pm 10} \right)$

Or a. a. s. || $\sqrt{100 - 30 \pm 10} = \sqrt{25} = 5$

$= \frac{100 - 30 \pm 10}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

FIGURE 11 Preuve algébrique extraite de la fiche élève du binôme Elina-Chloé.

En général, la seconde expérimentation a témoigné d'une progression pour la réalisation des tâches données. Ils ont eu plus d'autonomie dans la construction de la figure. Tous les élèves observés ont correctement créé un calcul géométrique de l'aire du triangle IMN . On a observé beaucoup d'explorations numériques de l'aire. Il y a sept binômes (sur 11) qui ont donné des conjectures exactes sur les positions du point M correspondant à l'aire maximale. Le choix des variables et l'exportation des fonctions sont spontanés. Le choix de la variable oM est dominant. Concernant la preuve algébrique, sept binômes ont utilisé la dérivée pour chercher une réponse. Les élèves étaient à l'aise avec les fonctionnalités comme «Développer», «Factoriser» ou «Dérivée» de Casyopée.

Développement conjoint de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'artefact pendant la genèse

Les réponses des élèves trouvées dans le questionnaire et dans l'entretien ont montré plusieurs problèmes significatifs concernant l'usage de Casyopée. Il apparaît clairement que les premiers usages ont été difficiles à cause de la variété des fonctionnalités de Casyopée. Ils confondent une fonction et une fonctionnalité:

On ne connaît pas exactement les différentes fonctions, différents outils qu'il y a dans Casyopée. On obtient des calculs et on ne sait pas comment on a fait pour y arriver: déroulement de calcul. (Elina, questionnaire)

Le logiciel possède plusieurs fonctions, donc parfois on ne sait pas quelle fonction prendre. (Marc, questionnaire)

Les élèves ont également rencontré des difficultés relatives à l'artefact mais aussi mathématiques lors de la phase de modélisation fonctionnelle, particulièrement sur l'action de choisir une variable:

La chose la plus dure, c'est le choix de variable. Après, il faut bien choisir la bonne variable. (Chloé, entretien)

Ces élèves ont indiqué comment les difficultés ont été dépassées au long de l'expérimentation. Leur maîtrise de Casyopée est justifiée par l'utilisation régulière et l'aide de l'enseignant:

J'ai téléchargé Casyopée sur Google donc je l'utilise quelques fois pour l'entraînement . . . Au début, j'avais du mal à trouver quelques fonctionnalités pour utiliser mais maintenant c'est bon . . . Avec l'aide du professeur qui nous explique comment faire pour résoudre certains problèmes. (Chloé, questionnaire)

Malgré les difficultés repérées dans les premiers usages, les élèves ont eu à la fin de la deuxième expérimentation des remarques positives par rapport aux caractéristiques spécifiques de Casyopée, notamment la modélisation fonctionnelle et la possibilité de relier dynamiquement les deux fenêtres géométrique et algébrique.

Le choix de variable, je trouve que cela est intéressant . . . Faire toutes les démarches est super: construction de la figure, tableau de variation, calcul de dérivée . . . Casyopée est plus rapide et plus commode qu'une calculatrice . . . On a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème . . . On voit mieux comment une fonction «réagit», c'est pratique et intéressant. (Chloé, questionnaire)

Utiliser différentes variables, tracer la figure, visualiser les fonctions (plusieurs en même temps), faire le tableau de signe, trouver la dérivée. (Elina, questionnaire)

Casyopée permet sur un problème géométrique d'étudier facilement en calculant les distances géométriques, de pouvoir établir des variables qui pourront ensuite servir pour étudier le problème par des fonctions. (Amandine, questionnaire)

Les potentialités de Casyopée ont été perçues comme éléments favorables pour l'apprentissage des fonctions car elles ont permis d'aborder le problème de manière spécifique, pratique et intéressante. La genèse instrumentale a créé chez les élèves une motivation à la fin de la deuxième expérimentation et a permis un travail significatif sur ce type de problème.

Dans le tableau ci-dessous, nous soulignons les liens et les articulations entre la progression des usages de Casyopée et le développement des connaissances mathématiques du binôme Elina-Chloé entre la première et la seconde expérimentation. Comme nous l'avons dit, ce binôme est représentatif d'une majorité des élèves de la classe.

En fait, chaque tâche mentionnée ci-dessus demande plus ou moins de connaissances mathématiques et de capacités à utiliser Casyopée. Cependant, l'observation des élèves pendant un temps long nous a montré que l'épisode de modélisation fonctionnelle est une étape où la synergie entre connaissances mathématiques et connaissances sur l'artefact est en jeu. Une distinction entre calculs, variables et fonctions facilite bien les manipulations avec Casyopée et les adaptations à ses rétroactions. De plus, le processus de modélisation fonctionnelle des dépendances permet de donner du sens à la notion de fonction.

TABLEAU 3
Développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée

Tâches	Progression des usages de Casyopée	Développement de connaissances mathématiques
Conception de la figure	- Correction plus rapide des erreurs après l'observation des déformations inattendues de la figure.	- Meilleure compréhension des dépendances fonctionnelles dans la figure.
Exploration et conjecture	- Définition correcte et utilisation d'un calcul géométrique pour l'aire. - Distinction entre deux boutons «Créer un calcul» et « Choisir une variable».	- Compréhension de la formule d'aire du triangle comme co-variation entre le point mobile M et la valeur de l'aire.
Modélisation fonctionnelle	- Usage spontané et facile des boutons «Choisir une variable» et «Exporter une fonction». - Adaptations rapides aux rétroactions du logiciel.	- Comprendre une dépendance fonctionnelle. - Distinguer une dépendance fonctionnelle parmi des co-variations.
Preuve algébrique	- Utilisation facile des transformations algébriques de Casyopée. - Pilotage des paramètres.	- Compréhension de différents comportements de la fonction dépendant du paramètre. - Compréhension d'une fonction paramétrique comme une famille de fonctions.

Connexion des activités sur les fonctions dans la typologie

Système physique – grandeurs et mesures

Création d'un calcul géométrique. La première expérimentation a témoigné d'une difficulté pour le passage du niveau «système physique» au niveau «grandeurs et mesures». Le binôme a passé beaucoup de temps pour créer un calcul géométrique et choisir une variable appropriée. Il a fait une confusion d'ordre instrumental entre deux actions de créer un calcul géométrique et de choisir une variable. En entrant un calcul géométrique de l'aire du rectangle $MNPQ$, il a fait une erreur et a tapé $MN \times MP$. Dans la seconde expérimentation, le binôme a créé correctement un calcul géométrique de l'aire du triangle IMN sans l'intervention de l'observateur.

Choix d'une variable. L'action de choisir une variable est le passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative dans le même niveau «grandeurs et mesures». Dans la première expérimentation, le binôme a eu du mal à choisir une variable adéquate et a eu besoin d'aide de l'observateur. Cette action a été améliorée pendant la seconde expérimentation. Le choix de la variable a été plus spontané et rapidement réalisé. Cependant, après avoir choisi une variable appropriée, ce binôme ne continuait pas à explorer la dépendance fonctionnelle et passait rapidement à l'exportation d'une fonction.

Grandeurs et mesures – fonctions mathématiques

Exportation d'une fonction. La première expérimentation a montré les difficultés des élèves dans le passage entre ces deux niveaux, tel qu'indiqué par les aides apportées par l'observateur pour l'action d'exporter une fonction. Les rétroactions de Casyopée sur la complexité des formules algébriques de la fonction exportée les ont aidés à trouver une variable plus appropriée.

À la fin de la deuxième expérimentation, les élèves ont montré une facilité pour ce passage ainsi que pour l'adaptation des rétroactions concernées sans l'aide de l'observateur. Ils ont également identifié le domaine de définition de la fonction exportée.

Fonctions mathématiques – Système physique

Durant les séances d'observation en classe, nous avons trouvé que les élèves n'ont pas montré une connexion claire entre ces deux niveaux. Une des difficultés pour cette connexion pourrait être issue de l'ergonomie de l'interface de deux fenêtres: on ne pouvait pas voir facilement en même temps la fenêtre de géométrie dynamique et la fenêtre graphique.

Cependant, à la fin de la deuxième expérimentation, les concepteurs du logiciel ont intégré un onglet «Graphiques» dans la fenêtre de géométrie dynamique de Casyopée qui permet d'afficher la représentation graphique de la fonction. Ce développement a effectivement facilité cette connexion chez des élèves. Nous présentons ci-dessous un extrait de l'entretien avec le binôme Elina-Chloé:

Chercheur: Bon, et comment cadrer le graphe?

Chloé: On peut grandir, modifier l'unité du repère. On peut déplacer le repère et zoomer sur une partie de la fenêtre.

Chercheur: D'accord. Et le petit point qui est marqué sur le graphe, il représente quoi?

(Le chercheur montre le point mobile sur le graphe dans la fenêtre graphique)

Elina: C'est le point M.

Chercheur: Oui, c'est bien.

Chloé: C'est le point libre M de la figure.

Cet extrait montre que ce binôme comprend la connexion entre le niveau «fonctions mathématiques» et le «système physique» via le lien dynamique entre le graphe de la fonction et la figure.

Co-développement des conceptions «processus» et «objet»

Dans le cadre géométrique, le binôme Elina-Chloé a bougé longtemps le point mobile M pour explorer des co-variations entre grandeurs. Il a d'abord exploré la co-variation entre la position du point M et l'aire du triangle IMN . Ces explorations encouragent la conception «processus», la co-variation étant considérée comme un processus associant deux grandeurs. Ensuite, le binôme a choisi la variable oM puis exploré la co-variation entre la valeur de cette variable et celle du calcul d'aire $\frac{1}{2}IM \times MN$, exprimée par la représentation pré-algébrique $oM \rightarrow \frac{IM \cdot MN}{2}$. C'est un passage de la conception «processus» à la conception «objet» où la fonction est exprimée par un symbole. Les explorations locales dans ce cadre ont encouragé le binôme à faire l'hypothèse, tant locale que globale sur la position du point mobile M et sur la valeur maximum de l'aire du triangle IMN .

Après avoir exploré les fonctions comme processus dynamiques dans le cadre géométrique, le binôme a exporté la dépendance fonctionnelle dans la fenêtre symbolique et a obtenu une expression algébrique de la fonction. Dans le cadre algébrique, ce binôme a d'abord exploré le graphe de la fonction. Il a fait le cadrage du graphe pour le visualiser. Ensuite, il a bougé un point mobile sur le graphe afin de repérer les coordonnées maximales. De notre point de vue, l'action de faire le cadrage du graphe favorise la conception «objet» sur la fonction, tandis que le repérage des coordonnées maximales en déplaçant un point mobile sur le graphe aide les élèves à développer la conception «processus». Finalement, le binôme est passé au registre symbolique ce qui suppose une conception «objet». Le travail de transformation algébrique ultérieur met en jeu un processus sur cet objet.

DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous avons considéré une approche des fonctions via la modélisation fonctionnelle de dépendances géométriques dans un environnement numérique d'apprentissage. Plus précisément, nous nous sommes intéressés aux apprentissages des fonctions au lycée sur un temps long d'utilisation de l'environnement Casyopée. L'analyse des observations a donné quelques éléments de réponse aux questions de recherche (section 8). Les progrès des élèves avec Casyopée peuvent être interprétés comme une genèse instrumentale relativement adéquate, particulièrement en ce qui concerne les fonctionnalités de modélisation de Casyopée et les connaissances mathématiques en jeu. Notre recherche a indiqué chez le binôme observé et chez les

autres élèves un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée, en plus de montrer comment l'utilisation régulière de l'artefact permet aux élèves d'articuler ces deux types de connaissances. Les élèves ont perçu l'importance et les difficultés de l'étape de modélisation fonctionnelle et comment la réalisation de cette étape mobilise ce développement conjoint de connaissances. Ils se montrent aussi capables de concevoir un problème d'optimisation de façon relativement décontextualisée, c'est-à-dire indépendamment de la façon dont il est traité dans un logiciel.

Notre étude a également éclairé la mise en œuvre de la typologie d'activités pour la modélisation fonctionnelle en environnements numériques d'apprentissage. L'analyse des usages de Casyopée en classe a montré ses potentialités pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. En particulier, les deux fonctionnalités «Calcul géométrique» et «Exporter une fonction» de Casyopée ont été reconnues comme outils permettant de relier les différents types d'activités sur les fonctions à leurs trois niveaux de représentation. Finalement, nous avons analysé comment l'usage de Casyopée peut faire émerger un co-développement des conceptions «processus» et «objet» et donc favoriser une compréhension flexible des fonctions. Notre étude montre ainsi comment une approche des fonctions dans un cadre géométrique (Bloch, 2003) peut exister au lycée grâce à des logiciels géométriques et algébriques comme Casyopée.

Notre étude intègre les deux premières dimensions du modèle de compétences de Weigand et Bichler: la compréhension des fonctions et les compétences relatives à l'outil, tout en les considérant dans un processus de développement sur un temps long. Cependant ce modèle vise une analyse plus fine des compétences à un moment donné de l'activité des élèves et il sera intéressant de considérer son utilisation pour analyser plus précisément des moments-clés des apprentissages que nous avons étudiés.

Dans le cadre du projet ReMath, Casyopée a été expérimenté en France et en Italie par des équipes partageant un intérêt pour l'approche instrumentale et pour la typologie d'activités (Maracci, Cazes, Vandebrouck et Mariotti, 2010). Les scénarios produits par les deux équipes diffèrent néanmoins quant à cette approche. Il apparaît que d'autres perspectives théoriques spécifiques à chacune des équipes – théorie des situations didactiques pour la France et théorie de la médiation sémiotique en Italie – ont fortement orienté les scénarios influençant la façon dont la genèse instrumentale des élèves est prise en compte. Une autre perspective de recherche examinera la question des apprentissages sur les fonctions sous différents angles théoriques et dans différents contextes.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes collègues de ce projet pour leur aide, particulièrement Xavier Meyrier, enseignant au Lycée Maupertuis à Saint-Malo en France, et ses élèves pour leur contribution active, ainsi que les relecteurs anonymes pour leur rétroaction sur l'ébauche de cet article.

NOTES

1. Extrait du programme officiel de Seconde, 2001.
2. En France, la classe de Seconde correspond aux élèves de 15 ans.

3. Extrait du programme officiel de Seconde, 2009.
4. Les classes de Première et de Terminale correspondent respectivement aux élèves de 16 ans et de 17 ans.
5. Technologie de l'Information et de Communication pour l'Enseignement.
6. Casyopée peut être téléchargé à: <http://casyopee.eu>.
7. ReMath: Representing Mathematics with Digital Media, Specific Targeted European Project (IST4-26751). <http://remath.cti.gr>.
8. Ici, il faudrait distinguer entre deux significations différentes du terme «instrumentation» dans deux contextes: la genèse instrumentale et la théorie de l'instrumentation.
9. Au sens de Duval (1993).

RÉFÉRENCES

- Aldon, G., Artigue, M., Bardini, C., Baroux-Raymond, D., Bonnafet, J.-L., Combes, M.-C. . . . Zucchi, I. (2008). Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail: le projet e-CoLab. *Repères IREM*, 72, 51–78.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274.
- Arzarello, F. et Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue CD Rom.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3–28.
- Bueno-Ravel, L. et Gueudet, G. (2009). Online resources in mathematics, teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(1), 1–20.
- Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée: méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *Petit x*, 67, 33–61.
- Drijvers, P., Kieran, C. et Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. Dans C. Hoyles et J.-B. Lagrange (dir.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain* (p. 89–132). New York: Springer.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 37–65.
- Falcade, R., Laborde, C. et Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 317–333.
- Guin, D. et Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195–227.
- Guin, D., Ruthven, K. et Trouche, L. (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*. New York: Springer.
- Haspekian, M. (2005). An «instrumental approach» to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), 109–141.
- Hodgson, R. et Muller, E. R. (1992). The impact of symbolic mathematical systems on mathematics education. Dans B. Cornu et A. Ralston (dir.), *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. Science and technology education series*, 44 (p. 93–107). Paris: UNESCO.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. Dans K. Stacey, H. Chick et M. Kendal (dir.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (p. 21–34). Dordrecht, Pays-Bas: Kluwer.
- Lagrange, J.-B. (2005). Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), 143–189.
- Lagrange, J.-B. et Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: A grid for designing a digital environment and analysing uses. Dans M. Tzekaki, M. Kaldrimidou et C. Sakonidis (dir.), *Proceedings of*

- the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Grèce: PME.
- Lagrange, J.-B. et Gelis, J.-M. (2008). The Casyopée project: A CAS environment for students' better access to algebra. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning*, 18(5/6), 575–584.
- Maracci, M., Cazes, C., Vandebrouck, F. et Mariotti, M. A. (2010). Casyopée in the classroom: Two different theory-driven pedagogical approaches. Dans V. Durant-Guerrier, S. Soury-Lavergne et F. Arzarello (dir.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1399–1408). Lyon, France: CERME 6.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of functions. Dans G. Harel et E. Dubinsky (dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 59–84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Tall, D. (1996). Functions and calculus. Dans A. J. Bishop et al. (dir.), *International handbook of mathematics education* (p. 289–325). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Trouche, L. (2007). Environnements informatisés d'apprentissage: quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques? Dans R. Floris et F. Conne (dir.), *Environnement informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (p. 19–38). Bruxelles: De Boeck.
- Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de Pédagogie*, 96(1), 79–86.
- Vérillon, P. et Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, 10(1), 77–101.
- Vygotsky. (1978). *Mind and society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Weigand, H.-G. et Bichler, E. (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics: The case of functions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 697–713.
- White, T. (2009). Encrypted objects and decryption processes: Problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 17–37.