TOÁN TỬ LAPLACE VỚI MẬT ĐỘ

NGUYỄN THỊ MỸ DUYÊN
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi trình bày các khái niệm về vi phân ngoài với mật độ của một dạng vi phân, đạo hàm với mật độ của một hàm, tích trong với mật độ và tích phân với mật độ như là sự mở rộng của các khái niệm tương ứng trong không gian Euclid cũng như các tính chất của chúng. Trên cơ sở đó, chúng tôi trình bày các kết quả của toán tử Laplace với mật độ của một hàm và của một siêu mặt trong $\mathbb{R}^n$.

1 GIỚI THIỆU

Trong không gian Euclid, toán tử Laplace của một hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được xác định bởi công thức $\Delta f = \text{div}\nabla f$, trong đó

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}); \quad \text{div}\nabla f = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Đối với mặt tham số $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ với $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, toán tử Laplace của mặt X được xác định bởi công thức $\Delta X := (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = X_{uu} + X_{vv}$. Khi đó tính cực tiểu của mặt có mối quan hệ chặt chẽ với toán tử Laplace của mặt. Điều này được khẳng định bởi định lý: Nếu mặt $X(u, v)$ là mặt tham số trực giao thì ta có đẳng thức $\Delta X = X_{uu} + X_{vv} = (2EH)N$. Hay nói cách khác, mặt tham số trực giao $X(u, v)$ là cực tiểu khi và chỉ khi $\Delta X = 0$.

Không gian với mật độ là không gian Euclid với một hàm dương e^{φ} dùng làm trọng số trong việc ước lượng thể tích. Hướng nghiên cứu không gian với mật độ đang thu hút nhiều nhóm tác giả trong đó phải kể đến nhóm nghiên cứu của giáo sư Morgan. Nhiều kết quả về mặt cực tiểu với mật độ nói chung và toán tử Laplace với mật độ nói riêng đã được đưa ra trong thời gian gần đây. Đây là vấn đề thời sự đang thu hút nhiều nhà toán học.

Theo trên, trong không gian Euclid toán tử Laplace của mặt được xác định bởi các toán tử ∇ và div. Do đó, muốn mở rộng khái niệm toán tử Laplace lên không gian

Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm Huế
ISSN 1859-1612, Số 02(14)/2010: tr. 15-24

với mật độ ta cần quan tâm đến việc xây dựng các phép toán vi phân ngoài với mật độ, đạo hàm với mật độ. Đi cùng với các phép toán này ta có các phép toán tích trong với mật độ và tích phân với mật độ.

Cuối cùng, khi đã có các phép toán như trên ta xây dựng khái niệm toán tử Laplace với mật độ sao cho nó thực sự là sự mở rộng khái niệm từ không gian Euclid lên không gian với mật độ. Hơn nữa, nó vẫn giữ mối quan hệ giữa toán tử Laplace với tính cực tiểu của mặt tham số trực giao.

1.1 Vi phân ngoài với mật độ của một dạng vi phân

Định nghĩa 1.1.1. Gọi ω là một k-dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$ với mật độ e^φ. Vi phân ngoài với mật độ e^φ của ω được xác định bởi công thức như sau:

$$d_\varphi \omega := e^{-\varphi} d(e^\varphi \omega) \tag{1}$$

Một dạng vi phân ω được gọi là d_φ-đóng nếu $d_\varphi w = 0$. Điều này tương đương với $d(e^\varphi \omega) = 0$. Một dạng vi phân ω được gọi là d_φ-khớp nếu $\omega = d_\varphi \eta$.

Khái niệm d_φ như trên đã được xuất hiện trong các tài liệu [1] và [3].

Nhận xét 1.

1. *Dễ dàng kiểm tra được một dạng vi phân ω là d_φ-khớp thì cũng là dạng vi phân d_φ-đóng nhờ tính toán đơn giản sau:*

$$d_\varphi \omega = e^{-\varphi} d(e^\varphi \omega) = e^{-\varphi} d\big(e^\varphi e^{-\varphi} d(e^\varphi \eta)\big) = e^{-\varphi} d^2(e^\varphi \eta) = 0.$$

2. *Gọi ω là một k-dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$, lúc đó ta có $d_\varphi^2 \omega = 0$. Thật vậy ta có:*

$$d_\varphi^2 \omega = d_\varphi(d_\varphi \omega) = e^{-\varphi} d(e^\varphi d_\varphi \omega) = e^{-\varphi} d(e^\varphi e^{-\varphi} d e^\varphi \omega) = e^{-\varphi} d^2(e^\varphi \omega) = 0.$$

Mệnh đề 1.1.1. Gọi $\Lambda^k(T\mathbb{R}^n)^\star$ là tập hợp tất cả các k-dạng trên $\mathbb{R}^n$.

Ta có ánh xạ $f : \Lambda^k(T\mathbb{R}^n)^\star \longrightarrow \Lambda^k(T\mathbb{R}^n)^\star, \omega \longmapsto e^\varphi \omega$ là một đẳng cấu tuyến tính, biến dạng vi phân d_φ-đóng (khớp) thành dạng vi phân d-đóng (khớp). Vì vậy, $H^k_{WDR} = H^k_{DR}$.

Chứng minh. Dễ dàng nhận thấy f là một đẳng cấu tuyến tính.

Giả sử ω là một dạng vi phân d_φ-đóng. Ta có $e^{-\varphi} d(e^\varphi \omega) = 0$, suy ra $d\big(f(\omega)\big) = 0$. Do đó f biến dạng vi phân d_φ-đóng thành dạng vi phân d-đóng.

Giả sử $\omega = d_\varphi \eta$. Ta có $\omega = \mathrm{e}^{-\varphi} d(\mathrm{e}^{\varphi}\eta)$, suy ra $f(\omega) = d(\mathrm{e}^{\varphi}\eta)$. Do đó f biến dạng vi phân d_φ-khớp thành dạng vi phân d-khớp.

Vì vậy, với $H^k_{DR} = \dfrac{\ker d^{k+i}}{\mathrm{Im}\ d^k}$, ta có $H^k_{WDR} = H^k_{DR}$. □

Định lý 1.1.1. *Gọi ω_1, ω_2 là hai k-dạng, khi đó ta có*

1. *Vi phân của tổng*

$$d_\varphi(\omega_1 + \omega_2) = d_\varphi \omega_1 + d_\varphi \omega_2.$$

2. *Vi phân của tích*

$$\begin{aligned} d_\varphi(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d_\varphi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 && (2) \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d_\varphi \omega_2. && (3) \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ định nghĩa d_φ ta dễ dàng thu được điều cần chứng minh. □

Hệ quả 1.1.1. *Tích của một dạng vi phân d_φ-đóng và một dạng vi phân d-đóng hoặc tích của một dạng vi phân d-đóng và một dạng vi phân d_φ-đóng là một dạng vi phân d_φ-đóng.*

Chứng minh.

1. Từ (2) ta có tích của một dạng vi phân d_φ-đóng và một dạng vi phân d-đóng là một dạng vi phân d_φ-đóng.
2. Từ (3) ta có tích của một dạng vi phân d-đóng và một dạng vi phân d_φ-đóng là một dạng vi phân d_φ-đóng.

□

1.2 Đạo hàm với mật độ của một hàm

Định nghĩa 1.2.1. Đạo hàm với mật độ của một hàm được xác định bởi công thức

$$\frac{\partial_\varphi f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f. \tag{4}$$

Định lý 1.2.1.

1. Gọi $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là hai ánh xạ, $\lambda \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$$\frac{\partial_\varphi(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial_\varphi f}{\partial x_i} + \frac{\partial_\varphi g}{\partial x_i}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

$$\frac{\partial_\varphi(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial_\varphi f}{\partial x_i}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

2. Gọi $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một ánh xạ, khi đó ta có

$$\frac{\partial_\varphi^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial_\varphi^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{7}$$

Chứng minh.

1. Dễ dàng suy ra từ định nghĩa.
2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_\varphi^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial_\varphi}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f\Big) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f\Big) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f \\
&= \frac{\partial_\varphi^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.
\end{aligned}$$

□

Định lý 1.2.2. *Nếu $w = \sum_I \omega_I dx_I$ thì $d_\varphi \omega = \sum_I \sum_\alpha \Big(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\omega_I\Big) dx_\alpha dx_I$.*

Chứng minh. Dễ dàng suy ra từ định nghĩa $d_\varphi \omega$ và định nghĩa $\frac{\partial_\varphi f}{\partial x_i}$. □

1.3 Tích trong với mật độ

Định nghĩa 1.3.1. Gọi ω_1, ω_2 là hai dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa tích trong (hay tích) với mật độ của ω_1, ω_2 như sau:

$$\omega_1 \wedge_\varphi \omega_2 := \mathrm{e}^\varphi \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{8}$$

Định lý 1.3.1. *Gọi $\bigoplus_k \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ là tập tất cả các dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$, khi đó $\big(\bigoplus_k \Omega^k(\mathbb{R}^n), +, \wedge_\varphi\big)$ là một vành.*

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra $\left(\bigoplus_k \Omega^k(\mathbb{R}^n), +, \wedge_\varphi\right)$ thoả mãn các tiên đề của vành từ định nghĩa tích $\wedge_\varphi$ như trên. □

Định lý 1.3.2. *Tập* $\left(\bigoplus_k H^k_W(\mathbb{R}^n), +, \wedge_\varphi\right)$ *là một vành, trong đó:*

$$H^k_W(\mathbb{R}^n) = \frac{\ker d^k_\varphi}{\operatorname{Im} d^{k-1}_\varphi}. \tag{9}$$

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh phép toán tích của hai lớp tương đương không phụ thuộc phần tử đại diện, điều này cũng tương đương với việc chứng minh $[(\omega_1 + d_\varphi\eta_1) \wedge_\varphi (\omega_2 + d_\varphi\eta_2)]$ độc lập với η_1 và η_2. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + d_\varphi\eta_1) \wedge_\varphi (\omega_2 + d_\varphi\eta_2) &= \omega_1 \wedge_\varphi \omega_2 + \omega_1 \wedge_\varphi d_\varphi\eta_2 + d_\varphi\eta_1 \wedge_\varphi \omega_2 + d_\varphi\eta_1 \wedge_\varphi d_\varphi\eta_2 \\ &= \omega_1 \wedge_\varphi \omega_2 + d_\varphi\big((-1)^k\omega_1 \wedge_\varphi \eta_2 + \eta_1 \wedge_\varphi \omega_2 + \eta_1 \wedge_\varphi d_\varphi\eta_2\big)\end{aligned}$$

Suy ra, $[(\omega_1 + d_\varphi\eta_1) \wedge_\varphi (\omega_2 + d_\varphi\eta_2)] = [\omega_1 \wedge_\varphi \omega_2]$. Do đó ta có $[\omega_1] \wedge_\varphi [\omega_2] = [\omega_1 \wedge_\varphi \omega_2]$. Mặt khác, chúng ta dễ dàng kiểm tra $\left(\bigoplus_k H^k_W(\mathbb{R}^n), +, \wedge_\varphi\right)$ thoả mãn các tiên đề của vành. □

1.4 Tích phân với mật độ

Định nghĩa 1.4.1. Gọi ω là một k-dạng trên đa tạp M, ta có định nghĩa sau:

$$\overline{\int_M} \omega := \int_M \mathrm{e}^\varphi \omega. \tag{10}$$

Với định nghĩa tích phân với mật độ như trên ta có định lý Stokes như sau:

Định lý 1.4.1 (Stokes)**.** *Gọi ω là một k-dạng trên đa tạp M, khi đó:*

$$\overline{\int_{\partial M}} \omega = \overline{\int_M} d_\varphi \omega. \tag{11}$$

Chứng minh. Áp dụng định lý Stokes, ta có:

$$\overline{\int_{\partial M}} \omega = \int_{\partial M} \mathrm{e}^\varphi \omega = \int_M d\big(\mathrm{e}^\varphi \omega\big) = \int_M \mathrm{e}^\varphi \mathrm{e}^{-\varphi} d\big(\mathrm{e}^\varphi \omega\big) = \overline{\int_M} d_\varphi \omega.$$

□

2 TOÁN TỬ LAPLACE VỚI MẬT ĐỘ

Ta đã biết Laplace của một hàm f trong $\mathbb{R}^n$ được xác định bởi công thức $\Delta f := \mathrm{div}\nabla f$. Xét hàm khoảng cách $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, với $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Ta có:

$$\nabla r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \cdots, \frac{x_n}{r}\right) = \frac{x}{r};$$

$$\nabla r^2 = 2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2x.$$

Do đó :

$$\Delta r^2 = \mathrm{div}\nabla r^2 = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n.$$

Sau đây ta tính toán đối với hàm khoảng cách trên các mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^3$ (trường hợp $\mathbb{R}^n$ hoàn toàn tương tự). Gọi $X(x, y, z)$ với $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ là một tham số trực giao của một mặt cực tiểu. Giả sử $|X_u| = |X_v| = 1$ và $X_u.X_v = 0$. Khi đó $\Delta X := (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -2\overrightarrow{H}$, trong đó $\overrightarrow{H} = H\mathbf{n}$ là vector độ cong trung bình ($\mathbf{n}$ là trường vector đơn vị của mặt).

Xét hàm khoảng cách $r : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ta có $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, do đó $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, trong đó:

$$\Delta x^2 = \mathrm{div}\nabla x^2 = \mathrm{div}\left(\frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(2x\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(2x\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 2x\Delta x + 2|\nabla x|^2;$$

Tương tự ta tính được:

$$\Delta y^2 = 2y\Delta y + 2|\nabla y|^2;$$

$$\Delta z^2 = 2y\Delta z + 2|\nabla z|^2.$$

Do X cực tiểu nên $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Mặt khác:

$$|\nabla x|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2;$$

$$|\nabla y|^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2;$$

$$|\nabla z|^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Do đó:

$$\Delta r^2 = 2(|X_u|^2 + |X_v|^2) = 4.$$

Vậy trong không gian với mật độ khái niệm Laplace của một hàm hay của một mặt được xác định như thế nào? Các kết quả trên có gì thay đổi không?

Định nghĩa 2.0.2 (Laplace với mật độ của một hàm)**.** Gọi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm, khi đó Laplace với mật độ của f được xác định như sau:

$$\Delta_\varphi f := \mathrm{div}_\varphi \nabla f. \tag{12}$$

trong đó $\mathrm{div}_\varphi X := \mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{div}_(\mathrm{e}^{\varphi} X)$ với mọi trường vector X trên $T\Omega$.

Quay trở lại với hàm khoảng cách $r : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, xác định bởi công thức $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, với $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi r^2 &= \mathrm{div}_\varphi \nabla r^2 \\
&= \mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{div}(\mathrm{e}^{\varphi}\nabla r^2) \\
&= \mathrm{e}^{-\varphi}\Big(\mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{div}\nabla r^2 + \mathrm{e}^{\varphi}\langle \nabla\varphi, \nabla r^2\rangle\Big) \\
&= \Delta r^2 + \langle \nabla\varphi, \nabla r^2\rangle \\
&= 2n + \langle \nabla\varphi, \nabla r^2\rangle.
\end{aligned}$$

Định lý 2.0.2. *Gọi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm và Ω là một miền trên $\mathbb{R}^n$, khi đó*

$$\Delta_\varphi f = \Delta f + \langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle. \tag{13}$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của $\Delta_\varphi f$, ta có:

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi f &= \mathrm{e}^{-\varphi}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\mathrm{e}^{\varphi}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \\
&= \mathrm{e}^{-\varphi}\sum_{i=1}^n \Big(\mathrm{e}^{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathrm{e}^{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}\Big) \\
&= \Delta f + \langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Hệ quả 2.0.1. *Gọi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm và Ω là một miền trên $\mathbb{R}^n$, khi đó*

$$\Delta_\varphi f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_\varphi}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big).$$

Xét các mặt cực tiểu $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ trong $\mathbb{R}^3$ (trường hợp $\mathbb{R}^n$

hoàn toàn tương tự) với chú ý $\varphi(u,v)=\varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Ta tính được:

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi x &= \mathrm{div}_\varphi(\nabla x)\\
&= \mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{div}(\mathrm{e}^{\varphi}\nabla x)\\
&= \mathrm{e}^{-\varphi}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\mathrm{e}^{\varphi}\frac{\partial x}{\partial u}\Big)+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\mathrm{e}^{\varphi}\frac{\partial x}{\partial v}\Big)\Big]\\
&= \Delta x+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\\
&= \Delta x+\langle\nabla\varphi,X_u\rangle x_u+\langle\nabla\varphi,X_v\rangle x_v.
\end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\Delta_\varphi y=\Delta y+\langle\nabla\varphi,X_u\rangle y_u+\langle\nabla\varphi,X_v\rangle y_v;$$

$$\Delta_\varphi z=\Delta z+\langle\nabla\varphi,X_u\rangle z_u+\langle\nabla\varphi,X_v\rangle z_v.$$

Như vậy ta có:

$$(\Delta_\varphi x,\Delta_\varphi y,\Delta_\varphi z)=\Delta X+\langle\nabla\varphi,X_u\rangle X_u+\langle\nabla\varphi,X_v\rangle X_v.$$

Mặt khác, ta có biểu diễn:

$$\nabla\varphi=\langle\nabla\varphi,X_u\rangle X_u+\langle\nabla\varphi,X_v\rangle X_v+\langle\nabla\varphi,\mathbf{n}\rangle\mathbf{n}.$$

Do đó ta có:

$$(\Delta_\varphi x,\Delta_\varphi y,\Delta_\varphi z)=\Delta X+\Delta\varphi-\langle\nabla\varphi,\mathbf{n}\rangle\mathbf{n}.$$

Hay

$$(\Delta_\varphi x,\Delta_\varphi y,\Delta_\varphi z)-\nabla\varphi=\Delta X-\langle\nabla\varphi,\mathbf{n}\rangle\mathbf{n}.$$

Xét hàm khoảng cách $r:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, ta có $r^2=x^2+y^2+z^2$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi x^2 &= \mathrm{div}_\varphi(\nabla x^2)\\
&= \mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{div}(\mathrm{e}^{\varphi}\nabla x^2)\\
&= 2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{div}(\mathrm{e}^{\varphi}x\frac{\partial x}{\partial u},\mathrm{e}^{\varphi}x\frac{\partial x}{\partial v})\\
&= 2\mathrm{e}^{-\varphi}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\mathrm{e}^{\varphi}x\frac{\partial x}{\partial u}\Big)+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\mathrm{e}^{\varphi}x\frac{\partial x}{\partial v}\Big)\Big]\\
&= 2\Big[x\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+x\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial u}+x\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial v}+\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2\Big]\\
&= 2\Big[x\Big(\Delta x+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\Big)+|\nabla x|^2\Big]\\
&= 2x\Delta_\varphi x+2|\nabla x|^2.
\end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\Delta_\varphi y^2 = 2y\Delta_\varphi y + 2|\nabla y|^2;$$

$$\Delta_\varphi z^2 = 2z\Delta_\varphi z + 2|\nabla z|^2.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\Delta_\varphi r^2 &= \Delta_\varphi x^2 + \Delta_\varphi y^2 + \Delta_\varphi z^2\\ &= 2(x,y,z)(\Delta_\varphi x, \Delta_\varphi y, \Delta_\varphi z) + 2(|\nabla x|^2 + |\nabla y|^2 + |\nabla z|^2)\\ &= 2(x,y,z)(\Delta_\varphi x, \Delta_\varphi y, \Delta_\varphi z) + 4.\end{aligned}$$

Định nghĩa 2.0.3. Gọi $\sum$ siêu mặt trong $\mathbb{R}^n$ với mật độ e^φ, $X : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \sum \subset \mathbb{R}^n$ là một tham số hoá của $\sum$, khi đó Laplace với mật độ của X được xác định như sau:

$$\Delta_\varphi X = \Delta X - \langle \nabla\varphi, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n}, \tag{14}$$

trong đó $\mathbf{n}$ là trường vector đơn vị trên siêu mặt $\sum$.

Nhận xét 2. *Với định nghĩa trên ta có:*

$$\Delta_\varphi X = \Delta X - \langle \nabla\varphi, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n} = (\Delta_\varphi x, \Delta_\varphi y, \Delta_\varphi z) - \nabla\varphi. \tag{15}$$

Định lý 2.0.3. *Gọi $X : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \sum \subset \mathbb{R}^n$ là một tham số hoá trực giao của $\sum$, khi đó $X(\Omega)$ là mặt φ-cực tiểu khi và chỉ khi $\Delta_\varphi X = 0$.*

Chứng minh. $\Delta_\varphi X = \big(H - \langle \nabla\varphi, \mathbf{n}\rangle\big)\mathbf{n} = H_\varphi \mathbf{n}$. □

3 KẾT LUẬN

Như vậy, bài báo đã trình bày các khái niệm và kết quả mở rộng với mật độ của các khái niệm vi phân ngoài của một dạng vi phân, đạo hàm của một hàm, tích trong và tích phân của các dạng vi phân. Đặt biệt là khái niệm toán tử Laplace với mật độ của một hàm và của một siêu mặt trong $\mathbb{R}^n$ đã được thiết lập sao cho nó vẫn giữ mối quan hệ giữa toán tử Laplace với tính cực tiểu của mặt tham số trực giao trong không gian với mật độ.

Lời cảm ơn: Tôi xin chân thành cảm ơn Thầy giáo, PGS. TS. Đoàn Thế Hiếu đã cho tôi nhiều ý tưởng trong việc xây dựng, giải quyết vấn đề và hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thiện bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Lichnerowicz, Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif, C. R. Acad. Sci. Pais Sér. A-B 271 (1970), A650-A653.

[2] Doan The Hieu, Some calibrated surfaces in manifolds with density, Journal of Geometry and Physics 61 (2011) 1625-1629.

[3] E. Witten, Super symmertry and Morse theory, J. Differential Geom. 17(1982), No.4, 661-692.

[4] Edward L. Bueler,The Heat kernel weighted hodge laplacian on noncompact mannifolds, transactions of the American mathematical society, Vollume 351, Number 2 (1999), 683-713.

Title: LAPLACE OPERATOR WITH DENSITY

Abstract: In this paper, we present the notions of the weighted exterior derivative of a differential form, the weighted derivative of a function, weighted wedge product and integral with density as the extensions of the corresponding notions in Euclidean space as well as their properties. Base on these, we present some results on the weighted Laplace operator of a function and of a hypersurface in $\mathbb{R}^n$.

ThS. NGUYỄN THỊ MỸ DUYÊN
GV Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế